Notes de cours
Traitement du signal

Gabriel Dauphin

December 17, 2023

Contents

1 Description d'un signal : Cours A **4**
1.1 Classification discret/continu . . . 4
1.2 Signaux périodiques . . . 5
1.2.1 Signaux temps continus . . . 5
1.2.2 Signaux temps discret . . . 6
1.3 Quantification . . . 6
1.3.1 Présentation simplifiée de la quantification . . . 7
1.3.2 Présentation plus détaillée de la quantification . . . 7
1.4 Quelques transformations simples de signaux et leur visualisation . . . 8
1.5 Dirac . . . 10
1.6 Quelques signaux . . . 10

2 Échantillonnage d'un signal : Cours B **12**
2.1 Échantillonnage . . . 12
2.2 Critère de Shannon-Nyquist . . . 13
2.3 Chaîne de mesure . . . 13
2.4 Puissance et énergie . . . 13

3 Transformées de Fourier des signaux temps continu : Cours C **15**
3.1 Signaux périodiques/signaux à durée limitée . . . 15
3.2 Série de Fourier . . . 15
3.3 Propriétés de la série de Fourier . . . 16
3.4 Transformée de Fourier à temps continu (TFTC) . . . 18
3.5 Propriétés de la transformée de Fourier . . . 18
3.5.1 Propriétés similaires à celles des séries de Fourier . . . 18
3.5.2 Propriétés supplémentaires . . . 19
3.5.3 Exemples de transformées de Fourier . . . 20

4 Transformées de Fourier des signaux temps discret : Cours D **22**
4.1 Transformée de Fourier à temps discret (TFTD) . . . 22
4.2 Propriétés de la transformée de Fourier à temps discret . . . 22
4.3 Transformée de Fourier discrète (TFD) . . . 25
4.4 Propriétés de la transformée de Fourier discrète . . . 26
4.5 Exemples de transformées de Fourier discrète de signaux . . . 28
4.6 Notation matricielle . . . 29
4.7 Bourrage de zéros . . . 29

5 Repliement de spectre, filtres : Cours E **31**
5.1 Filtre analogique et réponse fréquentielle . . . 31
5.2 Filtre numérique et réponse fréquentielle . . . 33
5.3 Repliement de spectre . . . 35
5.4 Critère de Shannon-Nyquist . . . 36
5.5 Interpolation et reconstruction d'un signal . . . 36
5.6 Sous-échantillonnage . . . 37

5.7 Sur-échantillonnage . . . 38

6 Filtres et descripteurs de signaux : Cours EBis **39**
6.1 Filtres analgoqiques et produit de convolution en temps continu . . . 39
6.2 Filtres numériques et produit de convolution en temps discret . . . 40
6.3 Intercorrélation, autocorrélation et densité spectrale . . . 40
6.3.1 Signaux temps continu non-périodiques . . . 41
6.3.2 Signaux temps discret non-périodiques . . . 42
6.3.3 Signaux temps discret périodiques . . . 43

7 Fonctions de transfert : Cours 1F **44**
7.1 Définition de la transformée de Laplace . . . 44
7.2 Propriétés de la transformée de Laplace . . . 45
7.3 Filtre analogique, causalité et fonction de transfert . . . 47
7.4 Critère de stabilité des filtres analogiques . . . 47
7.5 Filtres analogiques à phase linéaire . . . 49
7.6 Filtres analogiques à phase minimale . . . 50

8 Descripteurs de signaux et de filtres : cours 2F **52**
8.1 Transformée en Z . . . 52
8.2 Propriétés de la transformée en Z . . . 53
8.3 Filtre numérique, causalité et fonction de transfert . . . 54
8.4 Critère de stabilité des filtres numériques . . . 55
8.5 Filtres numériques à phase linéaire . . . 56
8.6 Filtres numériques à phase minimale . . . 58

9 Synthèse de filtres numériques à réponse impulsionnelle finie : Cours G **60**
9.1 Filtres idéaux . . . 60
9.2 Synthèse d'un filtre numérique . . . 63
9.3 Utilisation des fenêtres . . . 63
9.4 Méthode de l'invariant impulsionnel . . . 66
9.5 Application aux signaux aléatoires . . . 66
9.5.1 Généralités . . . 66
9.5.2 Application au débruitage d'un signal . . . 67

10 Synthèse de filtres à réponses impulsionnelles infinies : Cours H **69**
10.1 Définition d'un filtre de Butterworth . . . 69
10.2 Synthèse d'un filtre analogique par un filtre de Butterworth . . . 70
10.3 Transformée Bilinéaire . . . 72
10.4 Synthèse d'un filtre numérique par un filtre de Butterworth . . . 73
10.5 Synthèse avec d'autres filtres . . . 73

A Rappel sur les complexes **75**
A.1 Écriture d'un complexe . . . 75
A.2 Représentation angulaire de complexes de module 1 . . . 75
A.3 Module et argument d'un complexe . . . 75
A.3.1 Argument d'un complexe . . . 76
A.3.2 Module d'un complexe . . . 76

B Justification des égalités de Parseval **77**
B.1 Cas d'un signal temps continu non-périodique . . . 77
B.2 Cas d'un signal temps continu et périodique . . . 77
B.3 Cas d'un signal temps discret non-périodique . . . 78
B.4 Cas d'un signal temps discret périodique . . . 79

C Exemple de calculs **81**
C.1 Calcul de la transformée de Laplace inverse d'une fonction de transfert dont le dénominateur contient une racine double . . . 81
C.2 Exemple de calcul de la transformée en Z inverse d'une fonction de transfert dont le dénominateur contient une racine double . . . 81

D Trouver les paramètres d'un signal sinusoïdal ajouté à une composante continue **83**

E Exemple de correction d'exercices **85**
E.1 Énoncé . . . 85
E.2 Correction . . . 85
E.2.1 Question 1 . . . 85
E.2.2 Question 2 . . . 86
E.2.3 Question 3 . . . 86

F Calcul avec les intégrales et les fonctions caractéristiques **88**

G Différentes techniques pour représenter le module d'une réponse fréquentielle **89**
G.1 $|\widehat{H}(f)| = |1 + e^{j\alpha f}|$ . . . 89
G.2 $|\widehat{H}(f)| = |1 + e^{j\alpha f}|$ . . . 89

H Bibliographie **90**

Chapter 1

Description d'un signal : Cours A

1.1 Classification discret/continu

En traitement de signal, on cherche à modéliser l'évolution de valeurs au cours du temps. Cette évolution est identifiée par un *signal*. On appelle un instant une date particulière de l'histoire. Cette date est identifiée par une valeur de t, positive si la date se trouve après le début de l'expérimentation et négative sinon. La lettre t indique généralement le temps écoulé en secondes. On entend par signal une succession de valeurs correspondant à des instants différents.

Si le signal prend une valeur à tous les instants, il s'agit d'un signal à temps continu qui peut être décrit par une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Si le signal prend des valeurs finies à des *instants régulièrement réparties*, il s'agit d'un signal à temps discret qui peut être décrit par une suite notée indifféremment s_n ou $s[n]$. La lettre n indique une numérotation de ces instants, le temps associé à chacun des ces instants est défini par

$$t_n = nT_e \tag{1.1}$$

où T_e est appelée la période d'échantillonnage.

Si le signal correspond à une grandeur qui ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, on appelle *alphabet* l'ensemble de ces valeurs. Un tel signal est à amplitude discrète et il peut être décrit par une suite ou une fonction.

Si le signal peut au contraire prendre n'importe quelle valeur il est dit à amplitude continue.

Ces deux critères temps continu/ temps discret et amplitude continu/ amplitude discrète définissent une classification des signaux en quatre catégories. Le fait de modéliser un phénomène par un signal dans une certaine catégorie est d'abord un choix qui conditionne le fait de pouvoir utiliser tel ou tel outil, choix qui s'avérera ensuite plus ou moins pertinent. On pourrait aussi choisir de modéliser au moyen d'une de ces catégories des signaux qui n'appartiennent à aucune de ces catégories, il convient alors de vérifier si les outils de traitement de signal qu'on souhaiterait utiliser s'étendent à de tels signaux.

Remarquons qu'un signal temps continu $s(t)$ peut être vu comme une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, où l'abscisse représente le temps. A ce titre on pourrait noter ce signal s. De même un signal temps discret s_n peut être vu comme une suite, où l'indice représente une numérotation des instants. A ce titre, on pourrait noter ce signal (s_n). Le choix qui est fait dans ce cours et qui semble être utilisé dans une part importante de la littérature scientifique en traitement du signal est justement de noter ces signaux $s(t)$ et s_n ou $s[n]$, parce que ce choix permet de bien indiquer la notion de continu/discret. Avec cette notation il devient essentiel que la variable muette (t pour le signal temps continu, ou n pour le signal temps discret) soit présente des deux côtés du signe égalité. Par exemple $s(t) = \frac{1}{t^2+1}$ a un sens alors que $s(t) = 2k$ n'a pas de sens. De même $s_n = 2n + 1$ a un sens alors que $s_n = k$ n'a pas de sens.

On représente un signal sur un intervalle de temps $[a, b]$ qui est parfois indiquée. Une telle représentation indique ce que le signal vaut en dehors de cet intervalle de temps. Ainsi la figure 1.1 montre trois représentations de $x(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\Re_+}(t)$ sur les intervalles $[-1, 1]$, $[0, 2]$ et $[2, 3]$.

Exemple 1 *La figure 1.2 montre le signal $x_n = e^{-n}\mathbf{1}_{\mathbb{N}}[n]$ avec $T_e = 0.1s$ entre les instants contenus dans $[-0.3, 0.8]$.*
Matlab:

```
Te=0.1;
n1=ceil(-0.3/Te-1e-15);
```

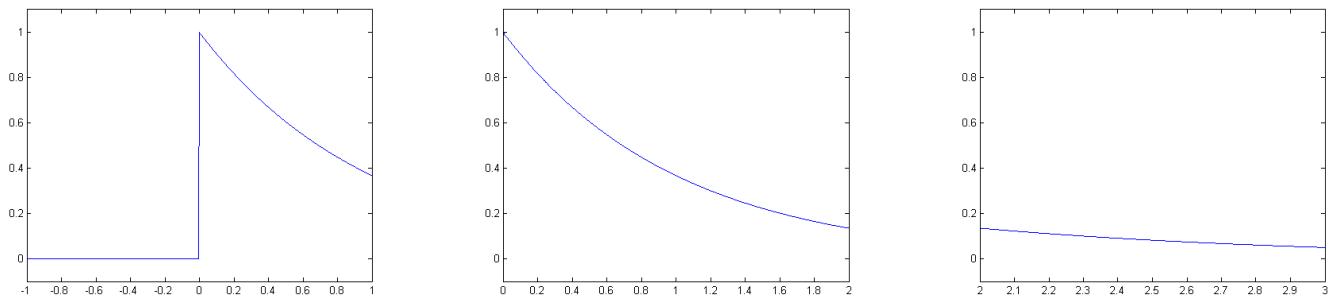


Figure 1.1: Représentation graphique d'un même signal sur différents intervalles.

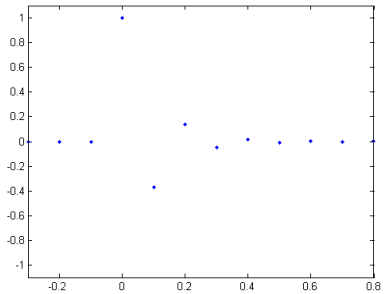


Figure 1.2: Représentation d'un signal temps discret.

```
n2=floor(0.8/Te);
n=n1:n2;
xn=exp(-n).*(-1).^n.*(n>=0);
figure(1); plot(n*Te,xn,'.'); axis([-0.3-1e-8 0.8 -1.1 1.1]);
```

Exemple 2 *La figure 1.3 montre dans l'intervalle* $[-0.3, 0.8]$*, le signal* $x(t) = e^{-10t}\cos(10t)\mathbf{1}_{\Re_+}(t)$*.*
Matlab:

```
Te=1e-3; a=-0.3; b=0.8;
t=a:Te:b;
xt=exp(-10*t).*cos(10*pi*t).*(t>=0);
figure(1); plot(t,xt); axis([-0.3-1e-8 0.8 -1.1 1.1]);
```

Cet exemple montre que généralement pour représenter un signal temps continu on relie les points obtenus avec une représentation temps continu à une fréquence d'échantillonnage beaucoup plus élevée.

1.2 Signaux périodiques

1.2.1 Signaux temps continus

Un signal temps continu périodique de période T vérifie :

$$\forall t \quad s(t+T) = s(t) \tag{1.2}$$

On dit aussi qu'un tel signal est T-périodique.

À partir du graphique d'un signal périodique, on peut visuellement lire la période. Il s'agit de trouver la distance minimale pour laquelle lorsqu'on déplace la courbe vers la droite, elle se superpose avec elle-même. À partir de l'échelle des abscisses, on peut convertir cette distance en un temps donné et ce temps est ce qu'on appelle la période.

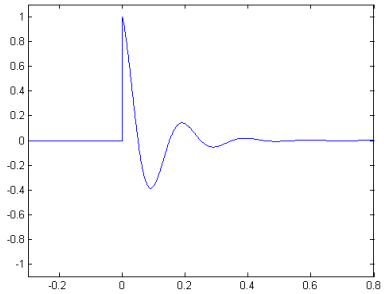


Figure 1.3: Représentation d'un signal temps continu.

Pour avoir une lecture plus précise, il est souhaitable d'utiliser une règle et d'utiliser le principe de proportionnalité entre la distance et le temps mesuré.

À partir de l'équation $x(t)$ d'un signal sinusoïdal temps continu, on peut aussi retrouver la période. Il suffit d'identifier $x(t)$ avec $x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$ et de lire la valeur f_0. La période du signal est alors donné par

$$T = \frac{1}{f_0} \tag{1.3}$$

1.2.2 Signaux temps discret

Un signal temps discret périodique de période N vérifie :

$$\forall n \quad s_{n+N} = s_n \tag{1.4}$$

On dit aussi qu'un tel signal est N-périodique. Dans le cadre de ce cours, on ne considère que des signaux dont la période T est un multiple de la période d'échantillonnage T_e.

À partir de l'équation x_n d'un signal sinusoïdal temps discret, on peut aussi retrouver la période. Il suffit d'identifier x_n avec $x_n = A\sin(2\pi f_0 n T_e + \varphi)$ et de lire la valeur f_0. La période du signal est alors donné par

$$NT_e = T = \frac{1}{f_0} \tag{1.5}$$

À partir de l'équation (1.5), on observe que f_0 ne peut pas tout à fait prendre n'importe quelles valeurs, il faut en fait que $\frac{f_e}{f_0}$ soit un entier (en effet $\frac{f_e}{f_0} = N$).

1.3 Quantification

La quantification consiste à approcher un signal à amplitude continue par un signal à amplitude discrète. On appelle *alphabet* ou *ensemble de niveaux* l'ensemble des valeurs discrètes possibles. On appelle *classe* associée à une de ces valeurs discrètes, toutes les valeurs du signal qui quantifiées donnerait cette valeur discrète particulière. Et il y a autant de classes qu'il y a de niveaux. Ainsi une classe est en général un intervalle. Les intervalles n'ont aucune valeur en commun et recouvrent l'ensemble des valeurs possibles du signal à quantifier.

Une quantification est dite *linéaire* si les différentes classes sont de la même taille, dans le cas contraire il s'agit d'une quantification *non-linéaire*. Mais la quantification n'est jamais une transformation linéaire.

Du fait qu'un signal quantifié sur N niveaux peut être stocké sur un registre à mémoire contenant n cases pouvant prendre la valeur 0 ou 1, lorsquie $N = 2^n$, il est d'usage d'appeler cela une quantification sur n bits.

$$N = 2^n$$

1.3.1 Présentation simplifiée de la quantification

Dans cette présentation, le signal est supposée temps continu, (mais une présentation très similaire pourrait être faite avec un signal temps discret). Le signal est supposé avoir des valeurs contenues dans un intervalle $[a, b]$.

$$s(t) \in [a, b]$$

On note N le *nombre de classes* et Q le *pas de quantification*.

$$Q = \frac{b-a}{N}$$

Le signal quantifié est

$$s_q(t) = Q \left\lfloor \frac{s(t)}{Q} \right\rfloor$$

où $\lfloor x \rfloor$ est une approximation entière de x, plus précisément il s'agit de la *partie entière*, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x [1].

1.3.2 Présentation plus détaillée de la quantification

La quantification linéaire se simule en quatre étapes.

- On restreint les valeurs du signal à un interval donné, cela peut se faire en écrétant le signal, c'est-à-dire que les valeurs qui sortent de l'intervalle sont remplacées par des valeurs extrêmes de l'intervalle. La transformation est définie par

$$x \mapsto \begin{cases} a & \text{si} \quad x < a \\ x & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ b & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

  Cette transformation peut aussi s'écrire de la façon suivante :

$$x \mapsto \max\left(a, \min(x, b)\right)$$

- On découpe l'intervalle en N intervalles juxtaposés appelés classes. Les différents intervalles sont données par :

$$\left[a, a + \frac{b-a}{N}\right[, \left[a + \frac{b-a}{N}, a + 2\frac{b-a}{N}\right[, \ldots, \left[a + (N-1)\frac{b-a}{N}, b\right[\tag{1.6}$$

- On remplace chaque valeur du signal par le numéro de la classe auquel la valeur appartient. Dans (1.6), les différents intervalles correspondent aux numéros $0, 1, 2, \ldots, N-1$. La transformation considérée est donc

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \left[a, a + \frac{b-a}{N}\right[\\ 1 & \text{si} \quad x \in \left[a + \frac{b-a}{N}, a + 2\frac{b-a}{N}\right[\\ & \vdots \\ N-1 & \text{si} \quad x \in \left[a + (N-1)\frac{b-a}{N}, b\right[\end{cases}$$

- On attribue à chaque code du signal quantifié une valeur représentative de la classe désignée par le code, cette valeur représentative est souvent le milieu de l'intervalle. Dans (1.6), les valeurs assignées à différents intervalles sont :

$$a + \frac{b-a}{2N},\ a + 3\frac{b-a}{2N},\ \ldots a + (2N-1)\frac{b-a}{2N}$$

  La transformation considérée est donc

$$x \mapsto \begin{cases} a + \frac{b-a}{2N} & \text{si} \quad x \in \left[a, a + \frac{b-a}{N}\right[\\ a + 3\frac{b-a}{2N} & \text{si} \quad x \in \left[a + \frac{b-a}{N}, a + 2\frac{b-a}{N}\right[\\ & \vdots \\ a + (2N-1)\frac{b-a}{2N} & \text{si} \quad x \in \left[a + (N-1)\frac{b-a}{N}, b\right[\end{cases}$$

[1] $\lfloor 3.7 \rfloor = \lfloor 3.2 \rfloor = 3$ et $\lfloor -3.7 \rfloor = \lfloor -3.2 \rfloor = -4$.

Dans une chaîne de mesure, la quantification est souvent réalisée par un convertisseur analogique/numérique.

Le signal ainsi transformé est de nouveau à valeurs continues mais il est différent du signal de départ. L'étude de l'impact d'une quantification sur un signal repose sur la comparaison entre le signal de départ et le signal quantifié.

$$\mathrm{err}(t) = |s(t) - s_q(t)|$$

où $s(t)$ est le signal non-quantifié et $s_q(t)$ est le signal quantifié. La moyenne de l'erreur quadratique pour une expérimentation qui dure entre $t = 0$ et $t = T$ est :

$$\mathrm{EQM} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(s(t) - s_q(t)\right)^2 \, dt$$

Pour simuler une quantification linéaire, une méthode consiste à utiliser la fonction partie entière (cette fonction est notée $\lfloor x \rfloor$ et à tout réel elle associe le plus grand entier inférieur à ce réel x).

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Cette fonction partie entière réalise de fait une quantification linéaire sur un intervalle quelconque mais avec des classes de taille 1. Il suffit donc de transformer linéairement l'intervalle $[a, b[$ sur lequel on veut quantifier le signal en l'intervalle $[0, N[$ si N est le nombre de classes souhaités. Le code de la valeur à quantifier est :

$$n \;=\; \left\lfloor N \frac{\max\left(a, \min\left(b, x\right)\right) - a}{b - a} \right\rfloor$$

La valeur décodée est :

$$x_q \;=\; \frac{n + \frac{1}{2}}{N}(b - a) + a$$

On peut noter qu'un signal périodique quantifié est encore périodique.

1.4 Quelques transformations simples de signaux et leur visualisation

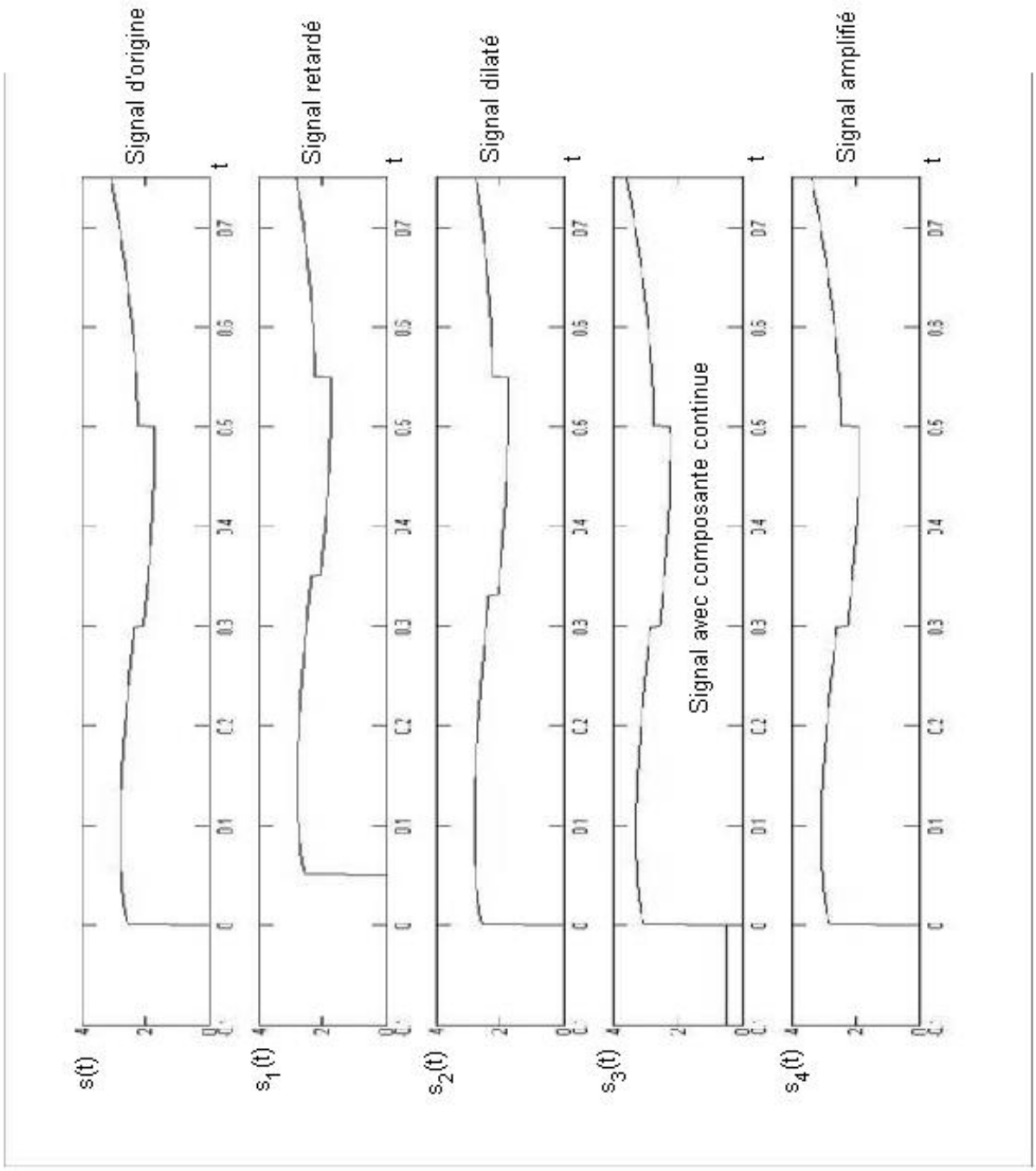
La figure 1.4 montre un exemple de visualisations de signaux. En abscisse figure l'échelle de temps, dont il est parfois essentiel de préciser l'unité par exemple pour distinguer entre seconde et millisecondes. Il n'y a en général pas d'unité sur l'axe des ordonnées.

Sur la figure 1.4, le deuxième graphique représente $s_1(t)$ qui est un signal retardé par rapport à $s(t)$: $s_1(t) = s(t - t_0)$ avec t_0 approximativement égal à 0.05s. $s(t)$ est un signal en avance par rapport à $s_1(t)$: $s(t) = s_1(t + t_0)$. La transformation de $s(t)$ en $s_1(t)$ est un décalage de l'échelle de temps.

Sur la figure 1.4, le troisième graphique représente $s_2(t)$ qui est un signal dilaté par rapport à $s(t)$: $s_2(t) = s(\frac{t}{a})$ avec a approximativement égal à 1.1. a est sans unité puisqu'il est un rapport entre deux variable avec la même unité (en l'occurence les deux variables sont les arguments de s et s_2 et sont en secondes). On appelle argument pour une fonction ou un signal, l'expression qui se trouve entre les parenthèses et qui suivent la lettre qui désigne le signal. $s(t)$ est un signal contracté par rapport à $s_2(t)$: $s(t) = s_2(at)$. La transformation de $s(t)$ en $s_2(t)$ est une dilatation de l'échelle de temps et la transformation de $s_2(t)$ en $s(t)$ est une contraction de l'échelle de temps. Dans cette figure ce qui permet de distinguer une dilatation de l'échelle des temps d'un décalage de l'échelle des temps est que dans le deuxième graphique $s_1(t)$ est par rapport à $s(t)$ partout décalé un peu vers la droite, tandis que dans le troisième graphique $s_2(t)$ est à peu près inchangé par rapport à $s(t)$ pour t proche de zéro et est décalé vers la droite sur la droite de la courbe.

Sur la figure 1.4, le quatrième graphique représente $s_3(t)$ qui apparaît surélevé par rapport à $s(t)$, on lui a rajouté une composante continue : $s_3(t) = s(t) + C$ avec C approximativement égal à 0.5. C aurait la même unité que $s(t)$, mais comme ici $s(t)$ est sans unité, C n'a pas non plus d'unité. $s(t)$ est un signal provenant de $s_3(t)$ auquel on a retranché une composante continue égale à C : $s(t) = s_3(t) - C$.

Sur la figure 1.4, le cinquième graphique représente $s_4(t)$ qui est amplifié par rapport à $s(t)$: $s_4(t) = as(t)$ avec a approximativement égal à 1.2. a est sans unité en tant que quotient de deux variables ayant la même unité (en l'occurence c'est le quotient de $s_4(t)$ et de $s(t)$, ici ils n'ont pas d'unité mais cela ne change pas le raisonnement. $s(t)$ est atténué par rapport à $s_4(t)$: $s(t) = \frac{1}{a}s_4(t)$. Dans cette figure ce qui permet ici de distinguer l'amplification du fait d'ajouter une composante continue est que dans le cinquième graphique on voit que pour toutes les valeurs de t où le signal $s(t)$ est sur l'axe horizontal, le signal $s_4(t)$ est aussi sur l'axe horizontal ($s(t) = 0 \Rightarrow s_4(t) = 0$). En revanche dans le quatrième graphique $s_3(t)$ est partout un peu plus élevé que $s(t)$.


s(t)
Signal d'origine
s1(t)
Signal retardé
s2(t)
Signal dilaté
s3(t)
Signal avec composante continue
s4(t)
Signal amplifié
t

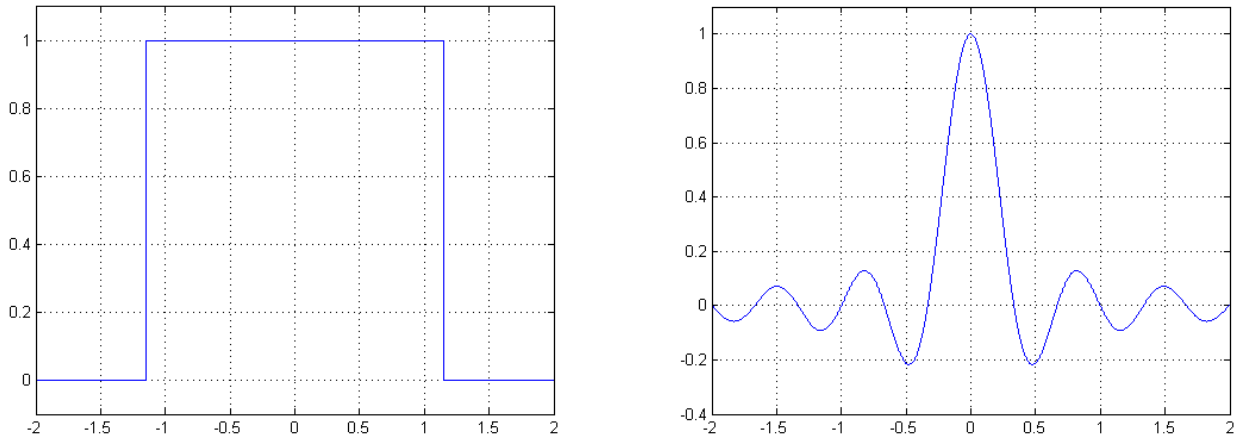


Figure 1.5: Représentation graphique à gauche d'une fonction porte centrée et de longueur 2.3s et à droite d'un sinus cardinal.

1.5 Dirac

Nous utilisons ici la notion de Dirac à la fois pour les signaux à temps continu et pour les signaux à temps discret.

Pour les signaux à temps continu, nous utilisons la distribution de Dirac, qui par un abus de notation et de langage est aussi appelée fonction de Dirac et vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)g(t)\,dt = g(t_0) \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t_0-t)g(t)\,dt = g(t_0) \tag{1.7}$$

Tout se passe comme si $\delta(t)$ est nul partout sauf en $t=0$ et que $\delta(t-t_0)$ est nul partout sauf en $t=t_0$ en effet (1.7) montre que les valeurs prises par $g(t)$ en dehors de $t=t_0$ n'ont aucun impact sur le résultat du calcul de l'intégrale en l'occurence $g(t_0)$.

Cette notation permet par exemple page 21 avec (3.14) de noter dans une même expression la valeur complexe de la transformée de Fourier d'une sinusoïde et sa fréquence.

Pour les signaux à temps discret, nous utilisons le symbole de Kronecker δ_n qui est définie par

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par un abus de langage, cette notation est appelée aussi un Dirac. Le point commun est qu'il s'agit d'un signal à temps discret qui est nul partout sauf en $n=0$. On utilise aussi δ_{n-n_0} qui un peu comme $\delta(t-t_0)$ est nul partout sauf en $n=n_0$.

Ces notations permettent aussi de simplifier l'écriture de signaux à temps discret. Pour définir une suite x_n on peut utiliser

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -1 \quad \forall n \notin \{0,1,2\}\, x_n = 0$$

ou alors

$$x_n = \delta_n + 2\delta_{n-1} - \delta_{n-2}$$

1.6 Quelques signaux

Le terme de fonction porte est utilisée pour des signaux temps continu un petit peu différents les uns des autres. On utilise ce terme par exemple pour

$$x(t) = \mathbf{1}_{[-T/2,T/2]}(t)$$

Cette fonction est représentée sur la gauche de la figure 1.5 pour $T = 2.3$s. Le nom de fonction porte provient de la ressemblance entre la courbe représentative de $x(t)$ et une porte. Tel que le signal $x(t)$ est défini, il s'agit d'une fonction paire $x(-t) = x(t)$, mais on parle aussi de fonction porte pour $x(t) = \mathbf{1}_{[0,T]}(t)$, ainsi défini il s'agit d'un signal dit causal c'est-à-dire pour lequel $x(t) = 0$ quand $t < 0$. Dans ces deux cas son intégrale vaut T : $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = T$ On parle aussi de fonction porte pour $x(t) = \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(t)$ ou pour $x(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$

La fonction sinus cardinal est une fonction très utilisée en optique de Fourier et en diffraction. Elle est souvent définie dans l'espace des fréquences, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une fonction qui à une fréquence associe une valeur. La fonction suivante est appelée un sinus cardinal

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

Cette fonction est représentée sur la droite de la figure 1.5 et $T = 1/3$s. Elle est parfois notée $\mathrm{sinc}(t/T)$ ou $\mathrm{sinc}(\pi t/T)$. Pour éviter toute ambigüité, nous utiliserons l'expression $\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$ Cette fonction est maximale en $t = 0$ et vaut 1. Le lobe central est de largeur $2T$, les autres lobes sont de largeur T.

Chapter 2

Échantillonnage d'un signal : Cours B

2.1 Échantillonnage

On appelle échantillonnage le fait de transformer un signal temps continu en un signal à temps discret. On appelle période d'échantillonnage la durée entre deux échantillons successifs, l'unité est a priori la seconde. On appelle fréquence d'échantillonnage l'inverse de la période d'échantillonnage, l'unité est a priori le Hertz (Hz). L'échantillonnage peut s'écrire ainsi :

$$s_n = s(nT_e) \tag{2.1}$$

La figure 1.2 montre l'échantillonnage de $x(t)$ représenté sur la figure 1.3 pour une période d'échantillonnage de 0.1s.

Remarque 1 *Pour être cohérent avec la suite du cours de traitement du signal, l'équation (2.1) doit être un peu adapté lorsque le signal $s(t)$ présente une discontinuité en une valeur de nT_e.*

Mathématiquement pour des fonctions qui présentent une discontinuité en $t = t_0$, on définit une limite à gauche et à droite.

$$s(t_0^-) = \lim_{t \to t_0^-} s(t) \text{ et } s(t_0^+) = \lim_{t \to t_0^+} s(t)$$

Concrètement $s(t_0^-)$ est le prolongement en t_0 de la fonction $t \mapsto s(t)$ définie sur un intervalle $[t_0 - \epsilon, t_0[$ pour une certaine valeur $\epsilon > 0$. De même $s(t_0^+)$ est le prolongement en t_0 de la fonction $t \mapsto s(t)$ définie sur un intervalle $]t_0, t_0 + \epsilon]$ pour une certaine valeur $\epsilon > 0$.

L'équation (2.1) s'écrit alors

$$s_n = \frac{1}{2} s(nT_e^-) + \frac{1}{2} s(nT_e^+)$$

On peut aussi noter les signaux temps discret comme étant une fonction ayant des diracs à chaqu'un des instants régulièrement réparties, c'est-à-dire qu'un signal temps discret peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n \delta(t - nT_e)$$

Dès lors, l'échantillonnage d'un signal s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$s_e(t) = \sum_n s(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

Et ce signal échantillonné apparait comme le produit d'un signal par un peigne de dirac (somme infinie de diracs à des instants régulièrement répartis)

$$s_e(t) = \sum_n s(t)\delta(t - nT_e) = s(t)\left(\sum_n \delta(t - nT_e)\right)$$

La démonstration repose sur le fait que pour n'importe quelle fonction f, $f(t)\delta(t - a) = f(a)\delta(t - a)$, ce qui traduit le fait qu'un dirac est nul partout sauf en un instant particulier.

Lorsqu'on écrit un signal il est très important de mettre la même variable muette à gauche et à droite du signe égalité. Cette expression n'a pas de sens

$$\cancel{s_n = \sum_n s(t)\delta(t - nT_e)}$$

Si un signal est périodique de période T et si la fréquence d'échantillonnage est multiple de $1/T$ alors le signal échantillonné s_n est N-périodique où $N = Tf_e$.

Dans une chaîne de mesure l'échantillonnage est réalisé par un échantillonneur, qui peut être un bloqueur d'ordre zéro. Dans ce cas l'échantillonnage est relativement conforme à l'équation (2.1) à un décalage de temps près, mais ce n'est pas toujours le cas. En fait (2.1) est plutôt une modélisation simplifiée de la réalité.

2.2 Critère de Shannon-Nyquist

Lorsqu'on échantillonne un signal, il est naturel de s'attendre à ce que le fait de chercher à retrouver le signal du départ à partir de la seule connaissance du signal échantillonné soit difficile, voire impossible, surtout si le signal de départ est très variable. Le critère de Shannon-Nyquist établit une durée minimale entre deux échantillons pour qu'il soit possible de reconstruire parfaitement le signal de départ à condition que ce signal de départ ne varie pas trop en un certain sens. Appliqué à une sinusoïde périodique de période T, ce critère affirme qu'il faut plus que deux points par période, ou dit autrement que la fréquence de la sinusoïde soit strictement inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Pour pouvoir appliquer le critère de Shannon-Nyquist à des signaux plus complexes il est nécessaire d'introduire la notion de transformée de Fourier afin de déterminer si le signal n'est pas trop variable.

Dans une chaîne de mesure, il y a en général un filtre anti-repliement de spectre avant l'échantillonneur, cela permet d'enlever au spectre du signal les fréquences trop élevées (celles au-delà de la moitié de la fréquence d'échantillonnage) de telle façon que lorsqu'on reconstruit le signal à partir du signal échantillonné celui-ci ne soit pas trop éloigné du signal du départ (autrement dit on peut espérer que la seule différence soit celle dûe au fait qu'on a retiré les fréquences trop élevées).

2.3 Chaîne de mesure

Quand on cherche à utiliser la puissance informatique pour traiter un signal, ou pour le transmettre à distance via un réseau il est nécessaire de transformer le signal provenant de capteurs en un signal qui peut être utilisé par un ordinateur, puis de faire la transformation inverse. A ce titre une chaîne de mesure contient les éléments suivants :

- capteur
- filtre anti-repliement
- échantillonneur
- convertisseur analogique numérique
- unité de calcul
- convertisseur numérique analogique
- système de restitution

2.4 Puissance et énergie

Par convention on considère que le carré du signal à un instant donné, $s^2(t)$ est la puissance instantanée. Dans un certain nombre d'applications cette quantité n'est pas homogène à une énergie, elle peut cependant être utilisée pour décrire le signal. On appelle puissance la moyenne de la puissance instantanée et on appelle énergie la puissance instantanée cumulée au cours du temps.

Pour le calcul de la puissance et de l'énergie, il faut distinguer quatre cas

- Si le signal est temps continu et T-périodique :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt \tag{2.2}$$

l'énergie est infinie, (sauf si la puissance est nulle auquel cas le signal est nul et l'énergie est nulle).

- Si le signal est temps continu et non-périodique :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt \tag{2.3}$$

si l'énergie est non-infinie alors la puissance est nulle. Mais si l'énergie est infinie alors on peut essayer de calculer la puissance

$$P = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)\,dt$$

- Si le signal est temps discret N-périodique :

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s_n^2 \tag{2.4}$$

l'énergie est infinie, (sauf si la puissance est nulle auquel cas le signal est nul et l'énergie est nulle).

- Si le signal est temps discret et non-périodique :

$$E = \sum_{-\infty}^{\infty} s_n^2 \tag{2.5}$$

si l'énergie est non-infinie alors la puissance est nulle. Mais si l'énergie est infinie alors on peut essayer de calculer la puissance

$$P = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} s_n^2$$

On observe les propriétés suivantes :

- Si on retarde un signal, c'est-à-dire si on considère $s(t-\tau)$ à la place de $s(t)$, c'est-à-dire si l'on considère un signal dont sa courbe aurait été décalée vers la droite, alors la puissance et l'énergie (si elles sont définies) restent identiques.

- Si on amplifie un signal, c'est-à-dire si on considère $s'(t) = \lambda s(t)$ au lieu de $s(t)$ alors la puissance et l'énergie sont amplifiées proportionnellement : $P' = \lambda^2 P$ et $E' = \lambda^2 E$.

- Si l'échelle des temps est dilatée, c'est-à-dire si on considère $s'(t) = s(t/a)$ alors la puissance est identique mais l'énergie est augmentée proportionnellement : $E' = aE$.

- Les énergies d'un signal sur des périodes de temps disjointes s'ajoutent :

$$s(t) = \sum_n \alpha_n \mathbf{1}_{[T_n,T_{n+1}]}(t) \Rightarrow E = \sum_n \alpha_n^2 (T_{n+1} - T_n)$$

où $\mathbf{1}_A(x)$ désigne la fonction caractéristique définie par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ sinon.

- Les puissances d'un signal sur des plages de fréquences disjointes s'ajoutent :

$$s(t) = \beta_0 + \sum_n \beta_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n) \Rightarrow E = \beta_0^2 + \frac{1}{2}\sum_n \beta_n^2$$

Chapter 3

Transformées de Fourier des signaux temps continu : Cours C

3.1 Signaux périodiques/signaux à durée limitée

Un signal à durée limitée est nul en dehors d'un certain intervalle :

$$t \notin [t_0, t_0 + T] \Rightarrow s(t) = 0$$

On appelle durée d'un signal la longueur de l'intervalle en dehors duquel ce signal est nul, ici la durée est T. A partir d'un signal à durée limitée on peut construire un signal périodique en répliquant ce signal. C'est ce qu'on appelle la périodisation.

$$s'(t) = \sum_n s(t - nT)$$

Le signal obtenu $s'(t)$ est bien T-périodique puisqu'il vérifie $s'(t+T) = s'(t)$. A partir de ce signal périodique on peut retrouver le signal de départ en multipliant le signal par une fonction porte :

$$s'(t)\mathbf{1}_{[t_0,t_0+T]}(t)$$

Les mêmes notions sont vraies pour les signaux à temps discret.

Un signal à durée limitée est nul en dehors d'un certain ensemble d'indices :

$$n \notin \{n_0..n_0 + N - 1\} \Rightarrow s_n = 0$$

On appelle durée d'un signal la taille de l'ensemble d'indices successifs en dehors duquel ce signal est nul, ici la durée est N. A partir d'un signal à durée limitée on peut construire un signal périodique en répliquant ce signal. C'est ce qu'on appelle la périodisation.

$$s'_n = \sum_k s_{n-kN}$$

Le signal obtenu s'_n est bien N-périodique puisqu'il vérifie $s'_{n+N} = s'_n$. A partir de ce signal périodique on peut retrouver le signal de départ en multipliant le signal par une fonction porte :

$$s'_n\mathbf{1}_{\{n_0..n_0+N-1\}}[n]$$

On remarque que la somme de deux signaux périodiques de même période est aussi périodique en revanche les deux périodes ne sont pas identiques, il n'est pas forcément vrai que cette somme soit un signal encore périodique.

3.2 Série de Fourier

La série de Fourier est un cas particulier de la transformée de Fourier, elle concerne exclusivement les signaux temps continu et périodiques. La transformée de Fourier de tels signaux sont une succession de raies, ces raies sont localisées en les fréquences multiples de $1/T$:

$$\widehat{X}(f) = \sum_k \widehat{X}_k \delta(f - \frac{k}{T})$$

où $\widehat{X}_k$ sont les coefficients de la série de Fourier :

$$\widehat{X}_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi k\frac{t}{T}}\,dt$$

Dans la mesure où la fonction à l'intérieur de l'intégrale $t \mapsto x(t)e^{-j2\pi k\frac{t}{T}}$ est en fait T-périodique, on ne modifie pas la valeur de l'intégrale et par suite de X_k lorsqu'on décale les bornes inférieures et supérieures du même laps de temps. Ainsi le calcul du coefficient de la série de Fourier ne porte en fait que sur un morceau du signal, avec une durée T et qui peut en fait être prélevé n'importe où dans le signal.

La transformée de Fourier inverse permet de retrouver le signal à partir de $\widehat{X}(f)$ appelé spectre du signal (et qui est en fait la transformée de Fourier du signal en temps). Comme il s'agit d'un signal temps continu et périodique, la transformée de Fourier inverse ne porte que sur X_k et produit un signal temps continu et T-périodique :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{X}_k e^{j2\pi k\frac{t}{T}} \tag{3.1}$$

Cette formule est appelée développement en série de Fourier.

3.3 Propriétés de la série de Fourier

On considère $x(t)$ un signal temps continu périodique de période T. Son énergie est infini et sa puissance est déterminée par $P = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt$ L'égalité de Parseval permet de retrouver sa puissance à partir de son spectre qui est constitué a priori d'une infinité de raies dont les coefficients associés $\widehat{X}_k$ sont à valeurs complexes [1]

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{X}_k\right|^2 \tag{3.2}$$

Une façon de tester cette formule consiste à considérer le signal $x(t) = 1$ et $\widehat{X}_k = \delta_k$ avec $P = 1$.

On considère une signal $x(t)$ temps continu périodique de période T. Le coefficient de la série de Fourier associé à la fréquence nulle correspond à la moyenne du signal $x(t)$

$$\widehat{X}_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

De même la valeur en l'instant nul (pourvu qu'il n'y ait pas de discontinuité) de $x(t)$ est donnée à partir des coefficients associées aux différentes raies du spectre :

$$x(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{X}_k$$

Le développement en série de Fourier est une transformation linéaire c'est-à-dire que si on multiplie un signal $x(t)$ par un facteur λ : $y(t) = \lambda x(t)$ alors $y(t)$ est aussi temps continu et périodique de période T et les coefficients de sa série de Fourier $\widehat{Y}_k$ se déduisent de ceux de $\widehat{X}_k$

$$\widehat{Y}_k = \lambda\widehat{X}_k$$

De plus si on ajoute deux signaux temps continu périodique $z(t) = x(t) + y(t)$ alors la somme est aussi un signal temps continu et périodique dont les coefficients de la série de Fourier sont

$$\widehat{Z}_k = \widehat{X}_k + \widehat{Y}_k$$

Lorsqu'on retarde $x(t)$ un signal temps continu périodique de période T d'un laps de temps τ $y(t) = x(t-\tau)$, le signal retardé est lui aussi périodique de période T et les coefficients de la série de Fourier sont déphasées

$$\widehat{Y}_k = e^{-j2\pi\frac{\tau}{T}k}\widehat{X}_k \tag{3.3}$$

[1] Une justification se trouve dans l'annexe B.2, p. 77.

Ainsi le module de ces coefficients reste identique.

Lorsqu'on dilate un signal $x(t)$ temps continu et périodique de période T, $y(t) = x(\frac{t}{a})$ avec $a > 1$, le signal dilaté est périodique mais avec une période plus longue $T' = aT$. Les coefficients de la série de Fourier de $y(t)$ sont identiques à ceux de $x(t)$:

$$\widehat{Y}_k = \widehat{X}_k$$

mais les raies auxquelles ils correspondent ont été contractées. Les coefficients $\widehat{Y}_k$ ne correspondent pas aux fréquences $f_k = \frac{k}{T}$ mais aux fréquences $f'_k = \frac{k}{aT}$.

$$f'_k = \frac{f_k}{a}$$

Les coefficients de la série de Fourier sont en général à valeurs complexes. Elles sont à valeurs réeels si elles proviennent d'un signal $x(t)$ temps continu périodique de période T et paire

$$x(t) = x(-t) \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{X}_k \in \Re$$

En pratique on représente graphiquement plus souvent les signaux temps continu périodique par une fonction définie sur l'intervalle $[0, T]$ plutôt que sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$. Pour de tels signaux la parité est équivalente à la symétrie par rapport à l'axe $t = T/2$.

$$x((t - \frac{T}{2})) = x(-(t - \frac{T}{2})) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = x(T - t) \quad \Leftrightarrow \quad x(T/2 - t) = x(T/2 + t)$$

Quand le signal $x(t)$ temps continu et périodique de période T n'est pas pair, les coefficients de la série de Fourier ne sont pas réels mais sont une suite hermitienne

$$\widehat{X}_{-k} = \overline{\widehat{X}_k} \tag{3.4}$$

Le module de ces coefficients est une suite paire

$$\left|\widehat{X}_{-k}\right| = \left|\widehat{X}_k\right|$$

L'argument de ces coeficients est une suite impaire

$$\arg\left(\widehat{X}_{-k}\right) = -\arg\left(\widehat{X}_k\right)$$

Le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ est un signal temps continu périodique de période $T = \frac{1}{f_0}$ et ses coefficients de Fourier $\widehat{X}_k$ sont nuls sauf pour $k = \pm 1$: $\widehat{X}_1 = \frac{1}{2}$ $\widehat{X}_{-1} = \frac{1}{2}$. Il est alors plus simple de noter sa transformée de Fourier ainsi

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \quad \Rightarrow \quad \widehat{X}(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

De même pour le signal $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ est un signal temps continu période de période $T == \frac{1}{f_0}$ qui n'a que deux coefficients de série de Fourier non-nuls $\widehat{X}_1 = \frac{1}{2j}$ $\widehat{X}_{-1} = -\frac{1}{2j}$ qui sont associés aux fréquences $\frac{1}{T} = f_0$ et $-\frac{1}{T} = -f_0$. Il est alors plus simple de noter sa transformée de Fourier ainsi

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \quad \Rightarrow \quad \widehat{X}(f) = \frac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

Le signal $x(t) = 1$ est un signal constant et à ce titre peut être considéré comme périodique : pour toute valeur de T, l'équation $x(t + T) = x(t)$ est vérifiée. Ce signal n'a qu'un coefficient de série de Fourier non nul $\widehat{X}_0 = 1$, ce coefficient est associé à la fréquence nulle

$$x(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad \widehat{X}(f) = \delta(f)$$

Si en général, on peut dire que le produit de transformées de Fourier de deux signaux est égal à la transformée de Fourier de la convolution entre les deux signaux, cette affirmation prend un sens très particulier quand il s'agit de signaux temps continu périodiques. Comme les transformées de Fourier sont en fait des raies, il faut que ces raies

soient positionnées sur les mêmes fréquences. La multiplication des raies (parfois notées sous la formes de sommes pondérées de fonctions de Dirac) signifie en fait le produit des coefficients complexes des séries de Fourier et associés à ces raies. Le fait que ces raies soient positionnées sur les mêmes fréquences signifie aussi que les deux signaux sont périodiques de la même période T. Le produit de convolution à considérer ici est un produit de convolution circulaire. Ces notions sont rarement utilisées.

Il existe en général une relation entre la transformée de fourier d'un signal $x(t)$ et la transformée de Fourier de sa primitive $y(t)$ et aussi entre la transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ et la transformée de Fourier de sa dérivée $z(t)$. La première relation est valable si la primitive $y(t)$ est aussi périodique, c'est-à-dire si l'intégrale sur une période de $x(t)$ est nulle. La deuxième relation est valable à condition de tenir compte de toutes les fonctions de Dirac qui peuvent apparaître du fait d'éventuelles discontinuitées de de $x(t)$ notamment entre $t = 0$ et $t = T$.

3.4 Transformée de Fourier à temps continu (TFTC)

Lorsqu'on applique la transformée de Fourier à un signal temps continu non périodique, cette transformée de Fourier garde le nom de transformée de Fourier et est définie par

$$\widehat{S}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}\,dt \tag{3.5}$$

$\widehat{S}(f)$ est une fonction à valeurs complexes définie pour toutes les fréquences. Cette fonction n'est pas périodique. Sa transformée de Fourier inverse est définie par

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{S}(f)e^{j2\pi ft}\,df \tag{3.6}$$

Il est possible de retrouver les coefficients de la série de Fourier d'un signal $s(t)$ périodique de période T à partir d'un calcul fait avec la transformée de Fourier adaptée aux signaux temps continu non périodiques. Il s'agit en effet de considérer $s'(t) = s(t)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)$ ($s'(t)$ est aussi appelé restriction de $s(t)$ sur une période). La ressemblance entre le calcul de la série de Fourier de $s(t)$ et le calcul de la transformée de Fourier de $s'(t)$ permet d'écrire

$$\widehat{S}_k = \frac{1}{T}\widehat{S}'\left(\frac{k}{T}\right)$$

3.5 Propriétés de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier a des propriétés similaires à la série de Fourier et aussi deux propriétés qui auraient été difficile à formuler en terme de série de Fourier.

3.5.1 Propriétés similaires à celles des séries de Fourier

L'égalité de Parseval qui pour la série de Fourier permet de calculer la puissance d'un signal temps continu périodique en fonction des coefficients de la série de Fourier est ici remplacé par une autre égalité de Parseval qui permet de calculer l'énergie d'un signal temps continu non périodique (la puissance serait nulle) en fonction d'une intégrale sur le module au carré de la transformée de Fourier (cette transformée de Fourier n'est plus composée de raies). Une forme de justification se trouve en annexe B.1 (p. 77).

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{X}(f)|^2\,df \tag{3.7}$$

L'intégrale d'un signal temps continu non périodique $x(t)$ est donnée par la valeur de la transformée de Fourier $\widehat{X}(f)$ en la fréquence nulle

$$\widehat{X}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt \tag{3.8}$$

La différence avec la série de Fourier est que $\widehat{X}(0)$ n'est pas la moyenne du signal mais son intégrale. Il vaut mieux réserver l'utilisation de cette formule au cas $\widehat{X}(f)$ ne comporte pas de discontinuité en $f = 0$.

De même la valeur en l'instant nul du signal $x(t)$ est donnée avec une expression intégrale

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{X}(f)\, df$$

Tout comme la sérier de Fourier, la transformée de Fourier est un opérateur linéaire, c'est-à-dire stable pour la multiplication par un facteur λ

$$\mathbb{TFTC}\left[\lambda x(t)\right] = \lambda \mathbb{TFTC}\left[x(t)\right]$$

et stable pour l'addition de deux signaux

$$\mathbb{TFTC}\left[x(t) + y(t)\right] = \mathbb{TFTC}\left[x(t)\right] + \mathbb{TFTC}\left[y(t)\right]$$

Lorsqu'on retarde un signal $x(t)$ de τ $y(t) = x(t-\tau)$, alors la transformée de Fourier est déphasée

$$\widehat{Y}(f) = e^{-j2\pi f\tau}\widehat{X}(f) \tag{3.9}$$

On peut remarquer que le module de cette transformée reste identique $|\widehat{Y}(f)| = |\widehat{X}(f)|$ La seule différence entre (3.9) et la formule relative aux séries de Fourier (3.3) est que la fraction $\frac{k}{T}$ qui correspond à une fréquence est ici remplacée par f.

Lorsqu'un signal temps continu $x(t)$ est dilaté $y(t) = x\left(\frac{t}{a}\right)$ avec $a > 1$, alors tout se passe comme si l'échelle des temps était contractée d'un facteur a et que le spectre est amplifié d'un facteur a.

$$\widehat{Y}(f) = a\widehat{X}(af)$$

Dans le cas des séries de Fourier, il n'y avait que le premier phénomène et non le second phénomène.

Les propriétés relatives à la parité sont les mêmes que pour les séries de Fourier. La transformée de Fourier d'un signal temps continu non périodique $x(t)$ est hermitienne c'est-à-dire que

$$\begin{array}{lcl} \widehat{X}(-f) & = & \overline{\widehat{X}(f)} \\ |\widehat{X}(-f)| & = & |\widehat{X}(f)| \\ \arg\left(\widehat{X}(-f)\right) & = & -\arg\left(\widehat{X}(f)\right) \end{array}$$

De plus le fait qu'un signal temps continu non périodique soit pair est équivalent au fait que sa transformée de Fourier soit réel.

$$x(t) = x(-t) \quad \Leftrightarrow \widehat{X}(f) \in \mathbb{R}$$

3.5.2 Propriétés supplémentaires

Une propriété importante pour les communications numériques où l'information importante doit se trouver en des fréquences voisines de la porteuse est la possibilité de décaler le spectre dans l'échelle des fréquences. Lorsqu'on multiplie un signal $x(t)$ par $e^{j2\pi f_0 t}$ alors le spectre est décalé de f_0

$$\mathbb{TFTC}\left[x(t)e^{j2\pi f_0 t}\right](f) = \mathbb{TFTC}\left[x(t)\right](f - f_0) \tag{3.10}$$

Dans la pratique un signal temps continu à valeur complexe n'a pas forcément de sens, et on utilise en général plutôt la transformation suivante

$$\mathbb{TFTC}\left[x(t)\cos(2\pi f_0 t)\right](f) = \frac{1}{2}\mathbb{TFTC}\left[x(t)\right](f - f_0) + \frac{1}{2}\mathbb{TFTC}\left[x(t)\right](f + f_0) \tag{3.11}$$

On alors un spectre qui est à la fois décalé vers des fréquences plus élevées et des fréquences plus basses. Il suffit alors comme on le verra plus tard d'utiliser un filtre passe-haut ou passe-bande pour supprimer la composante qui ne convient pas. On passe de (3.10) à (3.11) en ajoutant à (3.10) cette même équation appliquée à $-f_0$ et du fait que $\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$ ceci permet d'obtenir le résultat souhaité.

L'intégrale du spectre $\widehat{X}(f)$ d'un signal temps continu non périodique $x(t)$ est donnée par la valeur du signal en l'instant $t = 0$

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{X}(f)\, df$$

Il est préférable d'utiliser cette relation que lorsque $x(t)$ ne comporte pas de discontinuité en $t = 0$. En fait cette relation tout comme (3.8) pose des difficultés mathématiques, puisque d'un côté on définit souvent l'intégrale utilisée dans la transformée de Fourier ou dans sa transformée de Fourier inverse par une intégrale de Lebesgue qui n'accorde pas d'importance aux variations du signal sur un ensemble dénombrable de valeurs et par ailleurs on prétend pouvoir accéder aux valeurs exactes du signal en tout instant.

Il existe une relation entre la transformée de Fourier d'un signal et les transformée de Fourier de sa primitive et de sa dérivée. Plus précisément, on note $x(t)$ un signal temps continu alors

$$\mathbb{TFTC}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau\right](f) = \frac{1}{j2\pi f}\mathbb{TFTC}[x(t)](f) \tag{3.12}$$

$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$ est une primitive de $x(t)$, c'est-à-dire que sa dérivée est $x(t)$. Pour être mathématiquement correct, il faudrait que $x(t)$ et $y(t)$ aient les bonnes propriétés de régularité, on peut quand même vérifier que $x(t)$ est un signal qui tend vers zéro en l'infini $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Soit $x(t)$ un signal et $y(t) = \frac{dx}{d\tau}|_t$ alors

$$\widehat{Y}(f) = j2\pi f\widehat{X}(f) \tag{3.13}$$

Mathématiquement il faudrait que x et y aient les bonnes propriétés de régularité.

La transformée de Fourier du produit de convolution entre deux signaux temps continu non périodiques $x(t)$ et $y(t)$ est le produit des transformées de Fourier de ces signaux.

$$\mathbb{TFTC}\left[x(t) \star y(t)\right](f) = \mathbb{TFTC}[x(t)](f)\mathbb{TFTC}[y(t)](f)$$

où $\star$ désigne le produit de convolution entre deux signaux temps continu non périodiques

$$z(t) = x(t) \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)\, d\tau$$

Etant donné la similarité mathématique entre la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse pour des signaux temps continu non périodiques, il est aussi vrai que la transformée du produit de deux signaux temps continu non périodiques et le produit de convolution des transformées de Fourier

$$\mathbb{TFTC}[x(t)](f) * \mathbb{TFTC}[y(t)](f) = \mathbb{TFTC}[x(t)y(t)](f)$$

en notant $\widehat{X}(f) = \mathbb{TFTC}[x(t)](f)$ et $\widehat{Y}(f) = \mathbb{TFTC}[y(t)](f)$

$$\mathbb{TFTC}[x(t)](f) * \mathbb{TFTC}[y(t)](f) = \widehat{X}(f) * \widehat{Y}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{X}(\nu)\widehat{Y}(f-\nu)\, d\nu$$

3.5.3 Exemples de transformées de Fourier

Les quatre premiers exemples qui suivent posent une réelle difficulté mathématique vis-à-vis de la définition de la transformée de Fourier avec (3.5). Les deux derniers exemples sont bien définis avec (3.5). D'une façon générale, il arrive souvent que soit la définition du signal à temps continu, soit sa définition en terme de spectre, pose un problème, précisément parce que si un signal est contracté autour de $t = 0$, son spectre devient étendu et si à l'inverse un signal est étendu son spectre devient contracté. La façon de procéder consiste à se servir des propriétés de la transformée de Fourier pour trouver une formulation simple à utiliser et sans ambigüité.

$x(t) = 1$ est un signal temps continu non périodique mais l'intégrale dans (3.5) n'est pas défini (en effet $t \mapsto e^{j2\pi ft}$ n'est pas une fonction majorée par une fonction positive et dont l'intégrale est finie). En revanche on peut facilement calculer la transformée de Fourier inverse de $\widehat{X}(f) = \delta(f)$ (non pas parce que l'intégrale est définie mais en application de (1.7)) : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f)e^{j2\pi ft}\, df = 1$, ce qui prouve donc que

$$TF\left[1\right](f) \quad = \quad \delta(f)$$

L'application de (1.7)) prouve aussi que

$$TF\left[\delta(t)\right](f) \quad = \quad 1$$

Lorsque $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, (3.5) n'est pas défini, mais on peut encore remarque qui si on introduit $\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)$ dans (3.6) et qu'on applique (1.7)) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right]e^{j2\pi ft}\,df = \frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t)$$

$$TF\left[\cos(2\pi f_0 t)\right](f) \quad = \quad \frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0) \tag{3.14}$$

$$\tag{3.15}$$

Le même raisonnement montre aussi que

$$TF\left[\sin(2\pi f_0 t)\right](f) \quad = \quad \frac{1}{2j}\delta(f-f_0)-\frac{1}{2j}\delta(f+f_0)$$

Le signal temps continu périodique définie par $x(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}(t)$ est une fonction porte. Sa transformée de Fourier est un sinus cardinal

$$TFTC\left[\mathbf{1}_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}(t)\right](f) \quad = \quad \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$$

On peut retrouver dans cette équation l'application de diverses propriétés. La valeur en $f = 0$ du sinus cardinal, en l'occurence T, est égal à l'intégral de la fonction porte. Si on réduit la plage de temps associée à la porte, sa transformée de Fourier est diminuée en amplitude et dilatée en fréquence, ses lobes sont plus larges, moins élevés et plus éloignés les uns des autres. Si on augmente la plage de temps associée à la porte, sa transformée de Fourier est augmentée en amplitude et contractée en fréquence, ses lobes sont plus étroits, plus élevés et plus proches les uns des autres. La porte ainsi définie est un signal pair et son spectre est à valeurs réels.

C'est par décalage fréquentiel de ce spectre que l'on peut prouver

$$TFTC\left[\cos(2\pi f_0 t)\mathbf{1}_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}(t)\right] \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi(f-f_0)T)}{\pi(f-f_0)}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\pi(f+f_0)T)}{\pi(f+f_0)}$$

Cette relation illustre un autre phénomène important. Pour des raisons pratiques, un signal dans la réalité ne peut s'étendre depuis l'infinité des temps et durer pour toute l'éternité. Il n'y a donc pas dans la réalité de vrais signaux sinusoïdaux. Mais on peut avoir une idée de l'impact d'une restriction d'un signal sinusoïdal à un certain intervalle de temps sur son spectre. Dans le cadre de cette restriction on observe que le spectre qui aurait dû être composé de deux raies, comporte effectivement ces deux raies mais il y a aussi des ondulations correspondant aux sinus cardinaux et la largeur du lobe principal est de $\frac{2}{T}$. Ainsi un ordre de grandeur de la résolution fréquentielle que l'on peut avoir avec un signal d'une durée de T est de $\Delta f = \pm\frac{1}{T}$.

Chapter 4

Transformées de Fourier des signaux temps discret : Cours D

4.1 Transformée de Fourier à temps discret (TFTD)

la transformée de Fourier à temmps discret est un cas particulier de la transformée de Fourier, cette transformée de Fourier à temps discret ne s'applique que sur des signaux temps discret non-périodiques. La transformée de Fourier d'un tel signal est une fonction définie pour toutes les fréquences, f_e-périodique où f_e est la fréquence d'échantillonnage. Il s'agit d'une fonction à valeurs complexes dont le module est une fonction paire ($|\widehat{X}(f)| = |\widehat{X}(-f)|$) et la phase est impaire ($\arg(\widehat{X}(f)) = -\arg(\widehat{X}(-f))$). Elle est définie par :

$$\widehat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n T_e} \tag{4.1}$$

On peut noter que si on avait cherché à approximer le résultat de la transformée de Fourier ($\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$) en approximant le signal $x(t)$ par la suite x_n, on aurait trouvé la transformée de Fourier temps discret multiplié par T_e. Dans la définition ce T_e n'est pas présent, mais il y a de nombreuses occasions où de fait on le rajoute (soit pour ajuster les spectre d'un signal temps continu avec un signal temps discret, soit pour établir des équivalences entre la transformée de Fourier et la transformée de Fourier temps discret pour des signaux particuliers).

La transformée de Fourier discrète inverse transforme un spectre qui est f_e-périodique en une succession de raies qui correspond au signal temps discret aussi la formule calcule une suite à partir d'une fonction à valeurs complexes définies sur un intervalle :

$$x_n = \frac{1}{f_e}\int_{-f_e/2}^{f_e/2} \widehat{X}(f)e^{j2\pi f n T_e}$$

où x_n est un signal temps discret dont la période d'échantillonnage est $1/f_e$.

4.2 Propriétés de la transformée de Fourier à temps discret

Soit s_n un signal temps discret non périodique à valeurs réels. Alors sa transformée de Fourier à temps discret $\widehat{S}(f)$ vérifie pour tout f.

$$\begin{array}{lcl} \widehat{S}(-f) & = & \bar{\widehat{S}}(f) \\ |\widehat{S}(-f)| & = & |\widehat{S}(f)| \\ \arg\left(\widehat{S}(-f)\right) & = & -\arg\left(\widehat{S}(f)\right) \end{array}$$

De plus le fait que s_n est un signal pair ($s_n = s_{-n}$) est équivalent au fait que $\widehat{S}(f)$ est réel.

L'énergie d'un signal s_n temps discret non périodique peut aussi être évaluée à partir de son spectre (théorème de Parseval), voir en annexe B.3, p. 78.

$$E = \frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} |\widehat{S}(f)|^2\,df \tag{4.2}$$

C'est le fait que le signal est non périodique qui fait qu'on s'intéresse à l'énergie et non à la puissance, (qui serait nulle). La définition de l'énergie utilisée ne dépend pas de f_e, ainsi si on multiplie par 2 f_e, le spectre de $\widehat{S}(f)$ reste périodique par rapport à f_e, l'intégrale ainsi calculée aurait alors doublée en valeur mais comme il faut aussi diviser par f_e, le résultat serait encore identique. Une façon de tester (4.2) consiste à considérer l'exemple $x_n = \delta_n$ et $\widehat{X}(f) = 1$ avec $E = 1$.

On a aussi les relations suivantes :

$$\widehat{X}(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$$

$$x_0 = \frac{1}{f_e}\int_{-f_e/2}^{f_e/2} \widehat{X}(f)\, df$$

La transformée de Fourier à temps discret est un opérateur linéaire. Elle conserve la multiplication par un facteur λ

$$\mathbb{TFTD}[\lambda x_n](f) = \lambda \mathbb{TFTD}[x_n](f)$$

où x_n est un signal temps discret non périodique. Elle conserve l'additivité des signaux

$$\mathbb{TFTD}[x_n + y_n](f) = \mathbb{TFTD}[x_n](f) + \mathbb{TFTD}[y_n](f)$$

Un retard sur un signal temps discret non périodique se traduit aussi par un déphasage du spectre

$$\mathbb{TFTD}[x_{n-d}](f) = e^{-j2\pi f d T_e}\mathbb{TFTD}[x_n](f) \tag{4.3}$$

où x_n et x_{n-d} sont deux signaux temps discret non périodiques, le deuxième étant retardé de dT_e par rapport au premier et $T_e = \frac{1}{f_e}$ est la période d'échantillonnage.

Un spectre peut être décalé en fréquence par la multiplication d'un signal approprié

$$\mathbb{TFTD}\left[x_n e^{j2\pi f_0 n T_e}\right](f) = \mathbb{TFTD}\left[x_n\right](f - f_0)$$

où x_n est un signal temps discret non périodique. Dans la pratique on multiplie x_n par un signal sinusoïdal de fréquence f_0 et on obtient un spectre qui est décalé vers des fréquences plus élevées de f_0 et plus basses de f_0

$$\mathbb{TFTD}\left[x_n \cos(2\pi f_0 n T_e)\right](f) = \frac{1}{2}\mathbb{TFTD}\left[x_n\right](f - f_0) + \frac{1}{2}\mathbb{TFTD}\left[x_n\right](f + f_0)$$

On utilise en général un filtre passe-haut ou passe-bande pour supprimer le décalage en fréquence non souhaitée.

Dilater ou contracter un signal temps discret non périodique signifie changer sa période d'échantillonnage ou sa fréquence d'échantillonnage sans changer les valeurs prises par la suite qui définit ce signal. Soit x_n un signal TDNP échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage f_e^x et y_n un signal TDNP ayant les mêmes valeurs que x_n mais échantillonné avec une autre fréquence d'échantillonnage f_e^y. On pose $a = \frac{T_e^y}{T_e^x}$. Alors les deux spectres prennent les mêmes valeurs mais pas pour les mêmes fréquences et $\frac{f_e^y}{f_e^x} = \frac{1}{a}$. Pour tout f

$$\widehat{Y}(f) = \widehat{X}(af)$$

On ne peut pas dériver ou intégrer un signal temps discret, en revanche à partir d'un signal temps discret non périodique, on peut définir le signal différence ou le signal somme cumulée avec la même fréquence d'échantillonnage. Le premier a pour valeur les différences entre les termes successifs des signaux. Le deuxième a pour valeur les valeurs successives des sommes cumulées. De façon analogue à la transformée de Fourier il y a aussi une relation la transformée de Fourier à temps discret d'un signal temps discret non périodique et la transformée de Fourier à temps discret du signal différence et aussi avec la transformée de Fourier à temps discret du signal somme cumulée.

Soit x_n un signal temps discret non périodique et $y_n = x_n - x_{n-1}$ le signal différence correspondant alors

$$\widehat{Y}(f) = (1 - e^{-j2\pi f T_e})\widehat{X}(f) \tag{4.4}$$

En effet $\widehat{Y}(f) = \text{TFTD}[x_n](f) - \text{TFTD}[x_{n-1}](f) = \widehat{X}(f) - e^{-j2\pi f T_e}\widehat{X}(f)$ (x_{n-1} est le signal retardé et on a appliqué (4.3)).

Soit x_n un signal temps discret non périodique et $y_n = \sum_{k \leq n} x_k$ le signal somme cumulée alors

$$\widehat{Y}(f) = \frac{1}{1 - e^{-j2\pi f T_e}}\widehat{X}(f) \tag{4.5}$$

Cette propriété peut être vue comme une conséquence de (4.4), puisque $x_n = y_n - y_{n-1}$.

Il est intéressant de noter que (4.4) et (4.5) ressemblent à (3.12) et (3.13) quand on fait tendre fT_e vers zéro.

La transformée de Fourier à temps discret transforme le produit de convolution entre deux signaux à temps discret non périodiques en un simple produit de transformée de Fourier.

$$\mathbb{TFTD}\left[x_n \overset{d}{*} y_n\right](f) = \mathbb{TFTD}\left[x_n\right](f)\mathbb{TFTD}\left[y_n\right](f) \tag{4.6}$$

Pour des signaux temps discret non périodiques, on définit le produit de convolution à temps discret par

$$x_n \overset{d}{*} y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{n-k}$$

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers positifs et négatifs.

A la différence de la transformée de Fourier pour les signaux à temps continu, il n'y a ici pas de difficultés mathématiques pour donner un sens à la transformée de Fourier à temps discret des signaux suivants.

La transformée de Fourier d'un Dirac à temps discret est la fonction constante 1.

$$TFTD\left[\delta_n\right](f) \quad = \quad 1$$

On peut remarquer que ce spectre est périodique mais en fait périodique de période f_e pour toute valeur de f_e. De même δ_n correspond à un signal temps discret qui ne dépend pas de la période d'échantillonnage T_e. Il confirme (4.6) dans la mesure où δ_n est l'élément neutre du produit de convolution $\delta_n \overset{d}{*} x_n = x_n$ et de même 1 est l'élément neutre du produit $1\widehat{X}(f) = \widehat{X}(f)$.

L'équivalent à temps discret d'une fonction porte est un signal qui vaut 1 pour $0 \leq n < N$ et 0 ailleurs et est défini par $x_n = \mathbf{1}_{[0..N-1]}[n]$. Sa transformée de Fourier ressemble à un sinus cardinal, il s'agit d'un quotient de sinus qui en basse fréquence est approximativement égale au sinus cardinal mais qui est aussi une fonction périodique de période f_e.

$$TFTD\left[\mathbf{1}_{[0..N-1]}[n]\right](f) \quad = \quad e^{-j\pi f(N-1)T_e}\frac{\sin(\pi f N T_e)}{\sin(\pi f T_e)} \tag{4.7}$$

Cette relation se démontre en utilisant $\sum_{n \geq 0} z^{-n} = \frac{1-z^{-n-1}}{1-z^{-1}}$ et en cherchant à mettre en facteur $e^{-j\pi f N T_e}$ dans la partie haute de la fraction et $e^{-j\pi f T_e}$ dans la partie basse de la fraction. Avec cette relation, on observe aussi que si N augmente, le signal en temps a une durée plus longue et que le spectre correspondant a des lobes plus étroits et des valeurs plus élevés tout en conservant une périodicité identique et égale à f_e.

La transformée de Fourier de signaux sinusoïdaux de fréquence f_0 sur une durée N et à temps discret de fréquence d'échantillonnage $f_e > 2f_0$ forme un spectre périodique dont la période est composé de deux pics en f_0 et en $-f_0$ avec des ondulations.

$$\begin{aligned}
TFTD\left[\cos(2\pi f_0 n T_e)\mathbf{1}_{[0..N-1]}[n]\right](f) &= \tfrac{1}{2}e^{-j\pi(f-f_0)(N-1)T_e}\tfrac{\sin(\pi(f-f_0)NT_e)}{\sin(\pi(f-f_0)T_e)} + \tfrac{1}{2}e^{-j\pi(f+f_0)(N-1)T_e}\tfrac{\sin(\pi(f+f_0)NT_e)}{\sin(\pi(f+f_0)T_e)} \\
TFTD\left[\sin(2\pi f_0 n T_e)\mathbf{1}_{[0..N-1]}[n]\right](f) &= \tfrac{1}{2j}e^{-j\pi(f-f_0)(N-1)T_e}\tfrac{\sin(\pi(f-f_0)NT_e)}{\sin(\pi(f-f_0)T_e)} - \tfrac{1}{2j}e^{-j\pi(f+f_0)(N-1)T_e}\tfrac{\sin(\pi(f+f_0)NT_e)}{\sin(\pi(f+f_0)T_e)}
\end{aligned}$$

Ces relations se démontrent en appliquant un décalage fréquentiel au spectre obtenu en (4.7). On observe aussi que si N augmente alors les pics en f_0 et $-f_0$ se détachent mieux des ondulations, ces pics sont plus élevés et les ondulations sont plus resserés autour des deux pics. Même lorsque la condition $f_e > 2f_0$ n'est pas vérifiée les formules restent vraies, mais ce qui se passe est qu'on ne voit plus les pics, et ce à cause du terme sous la fraction qui au lieu d'atténuer comme dans le cas d'un sinus cardinal contribue à masquer ou à donner une apparence de déplacement de ces pics. Cette condition $f_e > 2f_0$ correspond à une approximation du critère de Shannon Nyquist, ce serait le critère si le signal considéré était un vrai signal.

4.3 Transformée de Fourier discrète (TFD)

La transformée de Fourier discrète est adaptée au cas des signaux temps discret périodiques de fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T_e}$ et de période $T = NT_e$. Le spectre est alors périodique de période f_e parce que le signal est temps discret. Le spectre est composé de raies espacées de $\frac{f_e}{N} = \frac{1}{NT_e} = \frac{1}{T}$ parce que le signal est périodique de période $T = NT_e$.

On considère un signal temps discret périodique s_n de période N échantillonnée à f_e. La transformée de Fourier $\widehat{S}(f)$ est périodique de période f_e et est formée d'une succession de raies aux fréquences $f_k = k\frac{f_e}{N}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (Z étant les entiers positifs et négatifs).

$\widehat{S}(f)$ est décrite par des coefficients qui correspondent à $f_k = k\frac{f_e}{N}$ pour $k \in \{0...N-1\}$ et qui sont :

$$\widehat{S}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} \tag{4.8}$$

Ces coefficients forment une suite périodique de période N. Ce sont ces coefficients qui permettent de calculer la transformée de Fourier discrète. Aussi la transformée de Fourier discrète peut aussi s'écrire de cette façon

$$\widehat{S}_k = \mathbb{TFD}[s_n][k]$$

Dans cette écriture on dit que $\widehat{S}_k$ est périodique de période N.

La transformée de Fourier discrète de s_n peut s'écrire aussi

$$\mathrm{TF}[s_n](f) = f_e \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{S}_k \delta(f - k\frac{f_e}{N} - lf_e) \tag{4.9}$$

Le deuxième signe somme et le paramètre k décrit les différentes raies au sein de l'intervalle de fréquences $[0, f_e]$. Le premier signe somme et le paramètre l décrit la façon dont les différentes raies au sein de l'intervalle de fréquences $[0, f_e]$ sont rendues périodiques et s'étalent sur l'ensemble des fréquences. Dans cette deuxième écriture on dit que $\widehat{S}(f)$ est périodique de période f_e. Cette écriture est en fait moins utilisée, on remplace généralement le premier signe somme en utilisant le fait que $\widehat{S}_k$ est en fait périodique. Le terme f_e est rajouté pour rendre compatible cette formule avec la définition des séries de Fourier, en effet f_e est en fait $\frac{1}{T_e}$.

La transformée de Fourier discrète peut aussi s'écrire aussi

$$\mathrm{TF}[s_n](f) \;=\; f_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{TFD}[s_n][k]\delta(f - k\frac{f_e}{N}) \tag{4.10}$$

On retrouve aussi le terme f_e.

Par convention nous utiliserons pour la transformée de Fourier d'un signal temps discret périodique l'expression $\mathrm{TF}[s_n](f)$ lorsqu'il s'agit de la décrire au moyen d'un ensemble de fonctions de Dirac périodique de période f_e et l'expression $\mathbb{TFD}[s_n][k]$ lorsqu'il s'agit de la décrire par une suite de coefficients à valeurs complexes et périodique de période N. La définition de $\mathbb{TFD}[s_n][k]$ n'est pas unique, le terme de normalisation N est parfois introduit dans la transformée de Fourier discrète inverse, c'est le cas de Matlab, ce terme est parfois réparti entre la transformée de Fourier discrète et la transformée de Fourier discrète inverse sous la forme de deux produits par $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

L'utilisation importante de la transformée de Fourier ne provient pas tellement de ce que dans la réalité il est souvent pertinent de modéliser un ensemble d'évènements par un signal temps discret périodique, mais surtout de la possibilité de calculer avec un ordinateur (4.8) ce qui n'était pas exactement le cas des autres transformées de Fourier. En fait il y a même un algorithme rapide qui optimise le calcul de (4.8) qui s'appelle la transformée de Fourier rapide (TFR) ou `Fast Fourier Transform` (FFT).

C'est la raison pour laquelle on s'intéresse à l'approximation suivante. Soit $x(t)$ un signal temps continu non périodique nul sauf en un intervalle $[0, T]$. Soit x_n le signal temps discret périodique, échantillonné en respectant le critère de Shannon-Nyquist, rendu périodique de période N en modifiant les données nulles. On suppose aussi que N est suffisamment grand pour que $T \leq NT_e$. Alors pour k entier dans $[-N/2...N/2]$,

$$\mathrm{TF}[x(t)](kf_e/N) \approx NT_e\mathbb{TFD}[x_n][k]$$

Le terme NT_e rajouté est là pour coïncider avec l'approximation, N annule la division par N faite dans la définition de $\mathbb{TFD}$ faite à tort vis-à-vis de cette approximation et T_e est la largeur des rectangles utiliser pour approximer l'intégrale

faite dans la transformée de Fourier de $x(t)$. Même si on est amené à l'utiliser souvent, cette approximation n'est pas toujours de bonne qualité.

On peut naturellement aussi chercher à approximer la transformée de Fourier d'un signal temps continu non périodique par le calcule de la transformée de Fourier à temps discret du signal échantilloné à l'aide de l'ordinateur en un ensemble fini de fréquences mais si cet ensemble de fréquences en lesquels on calcule est comparable aux nombre de données que l'on dispose, les erreurs que l'on commet sont similaires à ceux que l'on effectue en utilisant une transformée de Fourier discrète.

Lorsqu'on calcule une transformée de Fourier discrète à l'aide d'un ordinateur, celui-ci fournit les coefficients à valeurs complexes $\widehat{S}_k$ pour $k \in \{0...N-1\}$ qui correspondent aux fréquences $f_k = \frac{kf_e}{N} \in [0, f_e[$ Ces coefficients suffisent à déterminer complètement la transformée de Fourier discrète puisque celle-ci est périodique de période f_e. Cependant on visualise en général cette transformée de Fourier sur l'intervalle $[-f_e/2, f_e/2]$ et non sur $[0, f_e]$ et l'allure des courbes n'est pas du tout la même suivant qu'on la représente sur le premier ou le deuxième intervalle. Ainsi un spectre qui serait croissant entre $-f_e/2$ et 0 puis décroissant entre 0 et $f_e/2$ et serait donc maximal au centre apparaîtrait comme minimal au centre s'il était représenté sur $[0, f_e]$ puisque décroissant entre 0 et $f_e/2$ et croissant entre $f_e/2$ et f_e. Par conséquent pour visualiser un spectre à partir de ses coefficients $\widehat{S}_k$ calculés par transformée de Fourier discrète il est nécessaire de trouver les coefficients correspondant aux fréquences $f_k \in [-f_e/2, 0]$. Si N est paire ce sont les fréquences associées à $k \in \{\frac{N}{2}..N-1\}$, mathématiquement on peut aussi bien mettre $k = N/2$ associé à $f = f_e/2$ ou à $f = -f_e/2$ tout à droite ou tout à gauche du graphique. Si N est impaire ce sont les fréquences associées à $k \in \{\frac{N+1}{2}..N-1\}$. Dans la visualisation sur $[-f_e/2, 0]$ les fréquences associés à ces coefficients sont $f_k = \frac{(k-N)f_e}{N}$, elles sont notées f'_k ou $k' = k - N$ et les coefficients complexes correspondant sont $\widehat{S}_k$ et souvent notés $\widehat{S}_{k'}$.

La transformée de Fourier discrète inverse est définie de manière similaire. On considère un spectre périodique $\widehat{S}(f)$ de période f_e ayant des raies aux fréquences $f_k = k\frac{f_e}{N}$ pour $k \in \{0...N-1\}$ associés aux coefficients $\widehat{S}_k$.

Alors la transformée de Fourier discrète inverse, notée $\mathbb{TFD}^{-1}$, est un signal s_n de période N

$$s_n = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{S}_k e^{j2\pi\frac{kn}{N}}$$

La transformée de Fourier discrète inverse s'écrit aussi

$$\mathbb{TFD}^{-1}[\widehat{S}_k](t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{S}_k e^{j2\pi\frac{kn}{N}} \delta(t - nT_e) \tag{4.11}$$

4.4 Propriétés de la transformée de Fourier discrète

Soit s_n un signal temps discret périodique. Alors les coefficients de sa transformée de Fourier discrète $\widehat{S}_k$ vérifient

$$\begin{array}{rcl} \widehat{S}_{-k} & = & \overline{\widehat{S}}_k \\ |\widehat{S}_{-k}| & = & |\widehat{S}_k| \\ \arg(\widehat{S}_{-k}) & = & -\arg(\widehat{S}_k) \end{array}$$

Si s_n est un signal temps discret périodique et paire ($s_n = s_{-n}$ ou dit autrement $s_n = s_{N-n}$) alors $\widehat{S}_k$ est à valeurs réels. En fait il y a même équivalence entre le fait que $\widehat{S}_k$ est réel et la parité de s_n.

La puissance d'un signal s_n TDP peut aussi être évalué à partir de son spectre (théorème de Parseval) [1]

$$\begin{array}{rcl} E & = & +\infty \\ P & = & \sum_{k=0}^{N-1} |\widehat{S}_k|^2 \end{array} \tag{4.12}$$

On peut remarquer que cette égalité ne dépend pas de la fréquence d'échantillonnage et en fait la définition de P ne fait pas non plus intervenir la période d'échantillonnage ou la fréquence d'échantillonnage.

[1] L'absence d'un coefficient $\frac{1}{N}$ peut surprendre dans la mesure où $\widehat{S}_k$ est périodique de période N. L'exemple suivant pour $N = 3$: $x_n = \{1, 1, 1\}$ et $\widehat{X}_k = \{1, 0, 0\}$ montre que $\frac{1}{N} = \frac{1}{3}$ doit être mis devant $\sum_{n=0}^{2} x_n^2$ et non devant $\sum_{k=0}^{2} \left|\widehat{X}_k\right|^2$. Une justification plus précise se trouve dans l'annexe B.4, p. 79.

On a aussi les relations suivantes :

$$\widehat{X}_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n$$

$$x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{X}_n$$

La transformée de Fourier discrète est un opérateur linéaire. Elle conserve la multiplication par un facteur λ et l'additivité.

$$\mathbb{TFD}[\lambda x_n][k] = \lambda \mathbb{TFD}[x_n][k]$$

où x_n est un signal temps discret périodique de période N et échantillonné à la fréquence f_e.

$$\mathbb{TFD}[x_n + y_n][k] = \mathbb{TFD}[x_n + y_n][k]$$

où x_n et y_n sont deux signaux temps discret périodiques de même période N et échantillonné à la même fréquence f_e.

La transformée de Fourier discrète d'un signal retardée est déphasée.

$$\mathbb{TFD}[x_{n-d}][k] = e^{-j2\pi k \frac{d}{N}} \mathbb{TFD}[x_n][k] \tag{4.13}$$

où x_n et x_{n-d} sont deux signaux temps discret périodique de même période N échantillonné à la même fréquence f_e, le deuxième signal est retardé de $d < N$ pas de temps par rapport au premier signal. Du fait que ces deux signaux sont périodiques, on peut aussi dire que x_{n-d} est en avance de $N - d$ pas de temps sur x_n, en effet $x_{n-d} = x_{n+(N-d)}$.

Lorsqu'un signal temps discret périodique est dilaté, ce ne sont pas les valeurs complexes calculées par la transformée de Fourier discrète qui sont modifiées, mais la fréquence d'échantillonnage qui est modifié et en l'occurence diminuée. Il en résulte alors que le spectre est modifié du fait de la diminution des valeurs complexes associées aux différentes raies et du fait des fréquences de ces différentes raies qui sont plus proches les unes des autres.

Soit x_n un signal temps discret périodique de période N échantillonné à la fréquence d'échantillonnage f_e^x et y_n un signal temps discret périodique avec les mêmes valeurs que x_n et de même période N mais échantillonné à la nouvelle fréquence f_e^y. Alors les raies de $\widehat{Y}(f)$ sont espacées de $\frac{f_e^y}{N}$ tandis que celles de $\widehat{X}(f)$ sont espacées de $\frac{f_e^x}{N}$

$$\widehat{Y}_k = \widehat{X}_k$$
$$\frac{1}{f_e^y}\widehat{Y}(f) = \frac{1}{f_e^x}\widehat{X}_k$$

Pour deux signaux temps discret périodiques x_n et y_n de même période N et de même fréquence d'échantillonnage f_e, il est faux de dire que le produit des transformées de Fourier est la transformée d'un produit de convolution. C'est une idée fausse ne serait-ce parce que le produit de convolution est définie par une somme infine et qu'appliqué à des signaux périodiques il produirait une suite infinie en tout instant. Cette propriété est vraie si on utilise le produit de convolution circulaire définie par

$$x_n \circledast y_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{n-k} \tag{4.14}$$

Cependant si N est grand, $x_n \circledast y_n$ est parfois une bonne approximation du produit de convolution de signaux rendus non périodiques en annulant les indices contenus hors de $\{0...N-1\}$. Cette approximation est, nous le verrons, assez souvent utiliser en particulier lorsque les filtres sont assez complexes et leur réponses fréquentielles bien déterminées. Cette approximation repose sur la même idée que le fait de considérer la transformée de Fourier discrète comme une bonne approximation de la transformée de Fourier à temps discret.

4.5 Exemples de transformées de Fourier discrète de signaux

On considère un signal $x_n = 1$ échantillonné à la fréquence d'échantillonnage f_e et périodique de période $N = 1$. Sa transformée de Fourier discrète est $\widehat{X}_k = 1$ d'après (4.8), mais ces coefficients complexes correspondent à des fréquences qui sont espacées de f_e, tandis que le signal x_n a ses échantillons espacées de $T_e = \frac{1}{f_e}$. x_n et $\widehat{X}_k$ correspondent à un signal et à un spectre tous deux composés d'une infinité de raies régulièrement espacés qui sont ce qu'on appelle un peigne de Dirac et c'est pour cette raison que l'on dit aussi que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac, en fait un peigne de Dirac divisé par l'intervalle de temps entre chaque Dirac du premier peigne de Dirac, ce qui revient à dire multiplié par f_e, ceci confirme le terme f_e rajouté dans (4.9) et (4.10).

$$\mathrm{TF}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT_e)\right] = \frac{1}{T_e}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(f - kf_e)\right]$$

On considère un signal $x_n^{(1)}$ périodique de période N et échantillonné à la fréquence $f_e^{(1)}$ défini par $x_n^{(1)} = \{10...0\}$. Sa transformée de Fourier est $\widehat{X}_k^{(1)} = \frac{1}{N}\{1...1\}$ d'après (4.8). On peut aussi voir $x_n^{(1)}$ comme étant une façon différente d'écrire le signal x_n en posant $T_e = NT_e^{(1)}$, $NT_e^{(1)}$ sépare en effet les échantillons non-nuls de $x_n^{(1)}$ qui sont les seuls échantillons utiles. Le spectre de x_n est en fait composé de raies espacées de $f_e = \frac{f_e^{(1)}}{N}$ et de valeur $f_e \times 1 = \frac{f_e^{(1)}}{N}$ qui coïncide avec le spectre de $x_n^{(1)}$ dont les raies sont aussi espacées $\frac{f_e^{(1)}}{N}$ et ont aussi comme valeur $f_e^{(1)}\frac{1}{N}$. On confirme ainsi aussi l'importance du terme f_e rajouté dans (4.10).

On considère un signal $x_n^{(2)}$ périodique de période N et échantillonné à la fréquence $f_e^{(2)}$ défini par $x_n = \{11...1\}$. Sa transformée de Fourier discrète vaut $\widehat{X}_k = \{10...0\}$ d'après (4.8). On peut aussi voir $x_n^{(2)}$ comme étant une façon différente d'écrire le signal x_n en posant $T_e = T_e^{(2)}$. Le spectre de x_n est composé de raies espacées de $f_e = N\frac{f_e^{(2)}}{N}$ et de valeur $f_e = f_e^{(2)}$ qui coïncident avec les raies non-nulles de $x_n^{(2)}$ qui sont espacées de $N\frac{f_e^{(2)}}{N}$ (il n'y a qu'une valeur de k pour chaque ensemble de N valeurs pour lesquelles $\widehat{X}_k$ sont non-nuls), et ces raies sont de valeurs $f_e^{(2)}$ puisque quand $\widehat{X}_k$ est non-nul il vaut 1.

On considère un signal $x_n^{(3)}$ temps discret de fréquence d'échantillonnage $f_e^{(3)}$ et périodique de période N défini sur sa période par δ_{n-d} où $d \in \{0..N-1\}$. Sa transformée de Fourier discrète vaut $\widehat{X}_k = \frac{1}{N}e^{-j2\pi\frac{dk}{N}}$ par application de (4.8). On peut aussi voir que $x_n^{(3)}$ est le signal $x_n^{(1)}$ retardé de d pas de temps et retrouver ainsi le résultat par application de (4.13).

On considère un signal $x_n^{(4)}$ temps discret de fréquence d'échantillonnage $f_e^{(4)}$ et périodique de période N définie par $x_n = \cos(2\pi\frac{dn}{N})$. Sa transformée de Fourier vaut

$$\begin{array}{rcl} \widehat{X}_d^{(4)} & = & \frac{1}{2} \text{ et } \widehat{X}_{N-d}^{(4)} = \frac{1}{2} \text{ et } \widehat{X}_{k\neq\{d,N-d\}}^{(4)} = 0 \text{ si } d \neq N/2 \\ \widehat{X}_{N/2}^{(4)} & = & 1 \text{ et } \widehat{X}_{k\neq d}^{(4)} = 0 \text{ sinon} \end{array}$$

Il serait difficile de trouver ce résultat avec (4.8) mais on peut décomposer x_n en la somme de deux exponentielles complexes $x_n = \frac{1}{2}e^{j2\pi\frac{dn}{N}} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi\frac{dn}{N}}$ et utiliser la définition de la transformée de Fourier discrète inverse (4.11). On considère d'abord le cas $d \neq N/2$, et on voit que

$$\mathbb{TFD}^{-1}\left[\delta_{k-d}[k]\right][n] = e^{j2\pi\frac{dn}{N}}$$

et que

$$\mathbb{TFD}^{-1}\left[\delta_{k+N-d}[k]\right][n] = e^{j2\pi\frac{(N-d)n}{N}} = e^{-j2\pi\frac{dn}{N}}$$

Ce qui suffit pour trouver le résultat souhaité. Dans le cas où $d = N/2$, les deux exponentielles complexes qui composent le signal sinusoïdal sont en fait confondues en une seule exponentielle. Cet exemple montre qu'il est aussi possible de décaler le spectre fréquentiellement en le multipliant par un signal sinusoïdal, ce signal sinusoïdal étant lui aussi temps discret et périodique de la même période.

Répliquer un signal signifie juxtaposer le signal défini sur un intervalle de temps un certain nombre de fois. Répliquer un signal périodique sur un intervalle correspondant à sa période ne modifie pas le signal. Mais s'agissant d'un signal temps discret périodique, cela modifie considérablement les calculs effectués par la transformée de Fourier

discrète et tout se passe comme si la réplication de P fois le signal introduit $P-1$ zéros dans les coefficients de la transformée de Fourier discrètes calculés.

Soit x_n un signal temps discret périodique de période N de fréquence d'échantillonnage f_e de coefficients de transformée de Fourier discrète $\widehat{X}_k$. Soit y_n un signal temps discret périodique de période PN échantillonné à f_e défini par

$$y_n = \{x_0...x_{N-1}x_0...x_{N-1}...x_0..x_{N-1}\}$$

Alors

$$\widehat{Y}_k = \{X_0\,0...0\,X_1\,0...0\,...X_{N-1}\,0...0\}$$

Insérer des zéros dans un signal temps discret signifie augmenter la fréquence d'échantillonnage par un facteur multiplicatif entier et mettre à zéro la valeurs des échantillons nouvellementa apparus. Cela ne change pas le signal, mais s'agissant d'un signal temps discret périodique, cela modifie considérablement le calcul de la transformée de Fourier discrète et tout se passe comme si l'introduction de $P-1$ zéros dans le signal temps discret (et la multiplication par P de la fréquence d'échantillonnage) provoque la réplication P fois, des coefficients de la transformée de Fourier discrète calculés.

Soit x_n un signal temps discret périodique de période N de fréquence d'échantillonnage f_e et de coefficients de transformée de Fourier discrète $\widehat{X}_k$. Soit y_n un signal temps discret périodique de période PN de fréquence d'échantillonnage Pf_e défini par

$$y_n = \{x_0\,0...0\,x_1\,0...0\,...\,x_{N-1}\,0...0\}$$

Alors

$$\widehat{Y}_k = \frac{1}{P}\{X_0X_1...X_{N-1}X_0X_1...X_{N-1}...X_0X_1...X_{N-1}\}$$

4.6 Notation matricielle

En notant $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, on peut noter la transformée de Fourier discrète sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \widehat{X}_0 \\ \widehat{X}_1 \\ \widehat{X}_2 \\ : \\ \widehat{X}_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & .. & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & .. & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & .. & W^{2(N-1)} \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & .. & W^{3(N-1)} \\ : & : & : & : & :: & : \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & W^{3(N-1)} & .. & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ : \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Tous ces calculs sont faits à N fixés et dans ce cas la valeur de W ne change pas d'un bout à l'autre de la matrice, ce qui autorise cette écriture, mais ceci n'est plus vrai si on modifie N parce qu'alors la valeur de W change.

4.7 Bourrage de zéros

Le bourrage de zéros concerne les signaux à temps discret périodiques et se distinguent de l'insertion de zéros entre chaque échantillons, le bourrage de zéros consiste à placer tous ces zéros en un seul emplacement et le signal est réellement modifié. On a alors deux propriétés, d'une part si le nombre de zéros rajoutés est un multiple du nombre d'échantillons initial alors certaines valeurs de la transformée de Fourier discrète du nouveau signal coïncident avec les valeurs de la transformée de Fourier discrète de l'ancien signal à un facteur près. D'autre part plus on rajoute ainsi des zéros, plus la tranformée de Fourier discrète se rapproche de la transformée de Fourier à temps discret du signal apériodisé.

Pour un signal temps discret périodique de période N et de fréquence d'échantillonnage f_e, on appelle signal apériodisé le signal $y_n = x_n\mathbf{1}_{\{0..N-1\}}$.

Pour un signal x_n temps discret périodique de période N et de fréquence d'échantillonnage f_e, on dit qu'on fait un bourrage de zéro lorsqu'on considère le signal y_n temps discret de même fréquence d'échantillonnage f_e et périodique mais sur une période plus longue $M > N$

$$\begin{aligned} y_n &= x_n \text{ si } n \in \{0..N-1\} \\ y_n &= 0 \text{ si } n \in \{N..M-1\} \end{aligned}$$

La première propriété énonce que l'on peut parfois retrouver certaines valeurs complexes de la transformée de Fourier discrète du nouveau signal à partir de la transformée de Fourier discrète de l'ancien signal. Si M est un multiple de N alors $\forall k \in \{0..N-1\}, M\widehat{Y}_{k\frac{M}{N}} = N\widehat{X}_k$ Mais on n'a pas d'informations de ce type pour les autres valeurs.

La deuxième propriété concerne la possibilité d'utiliser le bourrage de zéros pour faire de l'approximation. Plus M est grand, plus on réalise un bonne approximation de la transformée de Fourier à temps discret du signal apériodisé

$$\mathbb{TFD}[y_n][k] \approx \mathbb{TFTD}\left[x_n \mathbf{1}_{\{0..N-1\}}[n]\right](kf_e/N)$$

Le terme bourrage de zéro est parfois utilisé lorsqu'on rajoute des zéros à la transformée de Fourier discrète de façon à réaliser un sur-échantillonnage avec interpolation. Cependant la façon de rajouter les zéros est différente et repose sur le prochain cours sur le repliement de spectre.

Chapter 5

Repliement de spectre, filtres : Cours E

5.1 Filtre analogique et réponse fréquentielle

Un filtre analogique transforme un signal d'entrée $x(t)$ en un signal de sortie $y(t)$.

$$y(t) = \mathcal{H}[x(t)](t) \tag{5.1}$$

Le premier t et le deuxième t ne peuvent avoir la même valeur, il s'agit d'un abus de notation qui entre autre a l'avantage de pouvoir écrire plus facilement la notion d'invariance dans le temps (5.2). Les trois t rappellent que l'entrée et la sortie sont des fonctions. Le crochet ouvrant et fermant permet de préciser l'entrée sur lequel le filtre s'applique. $\mathcal{H}$ n'est pas une application d'un nombre réel vers un nombre réel mais une application d'une fonction vers une fonction. Le fait de modifier l'entrée $x(t)$ sur une intervalle de tempps I_1 peut avoir une conséquence sur al sorie sur un autre intervalle de temps.

On s'intéresse généralement à des filtres linéaires temps invariant et causaux. Un filtre est dit linéaire si d'une part il conserve la multiplication par un nombre

$$\mathcal{H}[\lambda x(t)] = \lambda \mathcal{H}[x(t)]$$

et s'il conserve l'additivité des signaux

$$\mathcal{H}[x(t) + y(t)] = \mathcal{H}[x(t)] + \mathcal{H}[y(t)]$$

Un filtre est dit temps invariant, s'il conserve le décalage dans le temps : si on retarde l'entrée de τ alors la sortie est retardée de τ :

$$\mathcal{H}[x(t-\tau)](t) = \mathcal{H}[x(t)](t-\tau) \tag{5.2}$$

Un filtre est dit causal si une modification dans le temps pour des instants supérieurs à t_0 ne peut affecter la sortie pour des instants inférieurs à t_0.

On peut définir la réponse fréquentielle d'une filtre uniquement lorsque ce filtre est linéaire et temps invariant. Cette réponse fréquentielle est définie pour chaque fréquence et notée $\hat{H}(f)$ et définie comme le facteur multiplicatif entre la transformée de Fourier de l'entrée $\hat{X}(f) = \mathrm{TF}[x(t)](f)$ et la transformée de Fourier de la sortie $\hat{Y}(f) = \mathrm{TF}[y(t)](f)$.

$$\hat{Y}(f) = \hat{H}(f)\hat{X}(f) \tag{5.3}$$

La grande importance accordée à la transformée de Fourier vient entre autre de (5.3) est valable pour les filtres linéaires temps invariant.

Beaucoup de filtres peuvent approximativement être considérés comme un de ces cinq types de filtres en fonction de ce que leur réponse fréquentielle ressemble à un des graphiques de la figure 5.1.

Sur la figure 5.1, on appelle fréquence de coupure la fréquence pour laquelle la réponse fréquencielle passe de 1 à 0, elle vaut 1 pour les deux premiers graphiques et 0.5 et 1.5 pour les deux suivants. Toutes ces courbes sont symétriques par rapport à $f = 0$, c'est généralement le cas des réponses fréquentielles, (plus précisément c'est le cas lorsque le filtre transforme des signaux à valeurs réelles en des signaux à valeurs réelles).

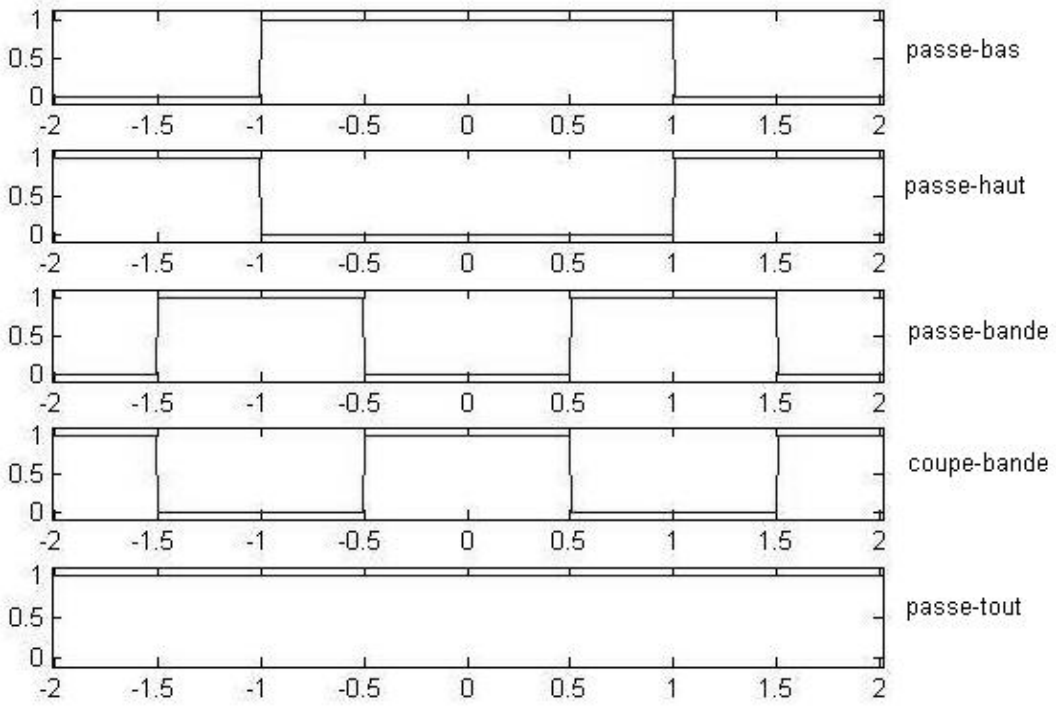


Figure 5.1: Types de filtres analogiques

Un filtre passe-tout n'est pas nécessairement un filtre identité où la sorite serait égale à l'entrée, en effet la phase de la réponse fréquentielle ($\arg(\hat{H}(f))$) peut varier ce qui est le cas pour un filtre à retard, c'est-à-dire un filtre dont la sortie est égale à l'entrée retardée d'un certain laps de temps.

La réponse fréquentielle donne des informations sur le comportement du filtre, la fréquence nulle correspond au comportement à longue durée.

La moyenne du signal en sortie peut s'exprimer en fonction de la moyenne du signal en entrée et la valeur de la réponse fréquentielle en la fréquence nulle.

$$< y(t) >= \hat{H}(0) < x(t) >$$

où $< x(t) >$ et $< y(t) >$ désignent les moyennes des signaux en entrée et en sortie. Ces moyennes peuvent se calculer avec $\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$ lorsque le signal considéré est périodique de période T ou avec $\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$ lorsque le signal n'est pas périodique.

Tout signal peut s'interprêter comme un mélange de sinusoïdes de diverses fréquences et le filtre amplifie/atténue, avance/retarde chacune de ces sinusoïdes en fonction de la valeur de la réponse fréquentielle associée à cette fréquence-là.

Si le signal en entrée est $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ alors le signal en sortie est

$$y(t) = \left|\hat{H}(f_0)\right| \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

où $\phi = \arg\left(\hat{H}(f_0)\right)$. C'est le module de la réponse fréquentielle $\left|\hat{H}(f_0)\right|$ qui détermine s'il y a amplification ou atténuation du signal et c'est la phase de la réponse fréquentielle $\arg\left(\hat{H}(f_0)\right)$ qui détermine s'il y a avance ou retard du signal. Cette affirmation n'est valable que si le signal en entrée est une sinusoïde définie sur $\mathbb{R}$. Cette affirmation peut aussi se mettre sous la forme

$$\mathcal{H}\left[e^{j2\pi f_0 t}\right] = \hat{H}(f_0)e^{j2\pi f_0 t}$$

5.2 Filtre numérique et réponse fréquentielle

Un filtre numérique est identique à un filtre analogique à ceci près qu'il s'applique à un signal temps discret x_n (l'entrée) et que sa sortie est aussi un signal temps discret y_n.

$$y_n = \mathcal{H}\left[x_n\right][n]$$

Dans cette notation les trois n sont des variables muettes au même titre que les trois t de (5.1). Le premier n et le deuxième n n'ont pas les mêmes valeurs, il s'agit aussi d'un abus de notation. $\mathcal{H}$ n'est pas une application d'un nombre réel vers un nombre réel mais une application d'une suite x_n vers une autre suite y_n. Le fait de modifier l'entrée x_n à un instant n_0 peut en général avoir des conséquences sur la sortie y_n à un autre instant $n_1 \neq n_0$.

On s'intéresse généralement à des filtres numériques linéaires temps invariants et causaux.

Un filtres est dit linéaire s'il conserve la multiplication par un nombre

$$\mathcal{H}\left[\lambda x_n\right][n] = \lambda\mathcal{H}\left[x_n\right][n]$$

et s'il conserve l'additivité des signaux

$$\mathcal{H}\left[x_n + y_n\right][n] = \mathcal{H}\left[x_n\right][n] + \mathcal{H}\left[y_n\right][n]$$

Un filtre est dit temps invariant s'il conserve le décalage dans le temps

$$\mathcal{H}\left[x_{n-n_0}\right][n] = \mathcal{H}\left[x_n\right][n - n_0]$$

Les réponses fréquentielles sont définies pour les filtres numériques linéaires temps invariant pour chaque fréquence comme le facteur multiplicatif entre la transformée de Fourier à temps discret de l'entrée $\hat{X}(f) = \mathbb{TFTD}[x_n](f)$ et la transformée de Fourier à temps discret de la sortie $\hat{Y}(f) = \mathbb{TFTD}[y_n](f)$.

$$\hat{Y}(f) = \hat{H}(f)\hat{X}(f)$$

La différence entre cette réponse fréquentielle et celle définie pour les filtres analogiques est que celle-ci est périodique de période f_e (fréquence d'échantillonnage), du fait des propriétés de la transformée de Fourier à temps discret. La réponse fréquentielle d'un filtre filtre numérique est généralement représentée sur l'intervalle $[-f_e/2, f_e/2]$ parce que cet intervalle suffit à déterminer complètement la réponse fréquentielle.

Beaucoup de filtres numériques approximés par un de ces cinq filtres en fonction de la ressemblance entre les réponses fréquentielles et l'une des courbes de la figure 5.2.

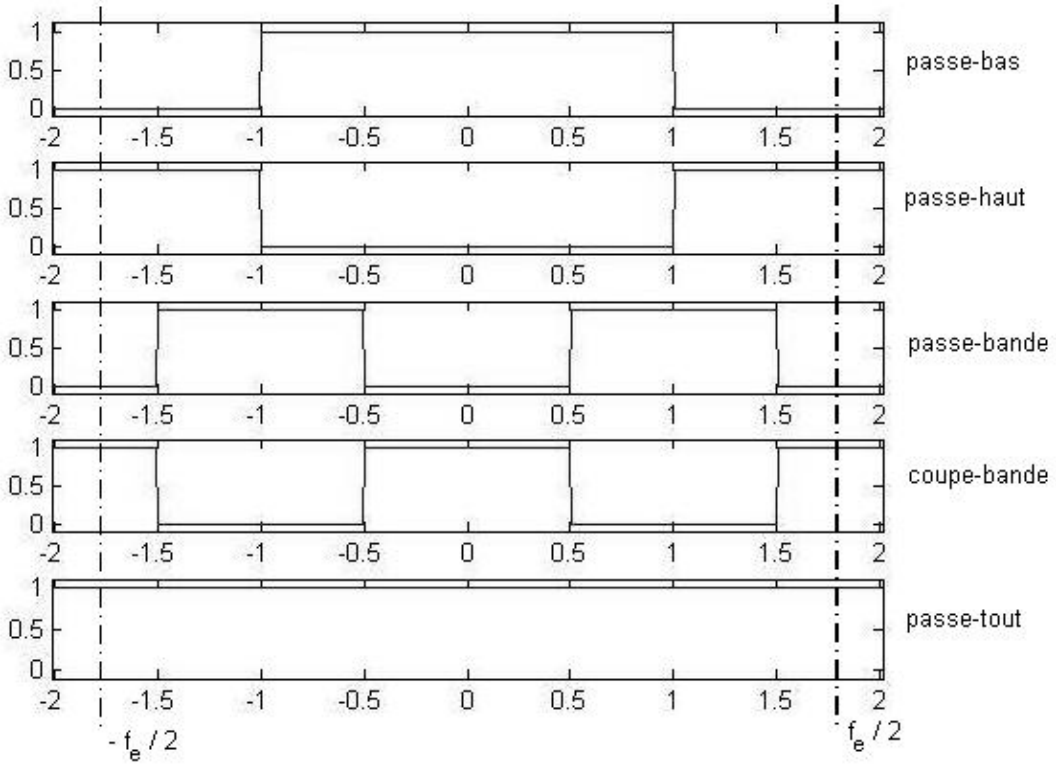


Figure 5.2: Types de filtres analogiques

La réponse fréquentielle donne des informations sur le comportement du filtre, la fréquence nulle correspond au comportement à longue durée.

La moyenne du signal en sortie peut s'exprimer en fonction de la moyenne du signal en entrée et la valeur de la réponse fréquentielle en la fréquence nulle.

$$< y_n >= \hat{H}(0) < x_n >$$

où $< x_n >$ et $< y_n >$ désignent les moyennes des signaux en entrée et en sortie. Ces moyennes peuvent se calculer avec $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n$ lorsque le signal considéré est périodique de période N ou avec $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x_n$ lorsque le signal n'est pas périodique.

Tout signal peut s'interprêter comme un mélange de sinusoïdes de diverses fréquences et le filtre amplifie/atténue, avance/retarde chacune de ces sinusoïdes en fonction de la valeur de la réponse fréquentielle associée à cette fréquence-là.

Si le signal en entrée est $x(t) = \cos(2\pi f_0 n T_e)$ alors le signal en sortie est $y(t) = \left|\hat{H}(f_0)\right| \cos(2\pi f_0 n T_e + \phi)$ où $\phi = \arg\left(\hat{H}(f_0)\right)$ et T_e est la période d'échantillonnage. C'est le module de la réponse fréquentielle $\left|\hat{H}(f_0)\right|$ qui détermine s'il y a amplification ou atténuation du signal et c'est la phase de la réponse fréquentielle $\arg\left(\hat{H}(f_0)\right)$ qui détermine s'il y a avance ou retard du signal. Cette affirmation n'est valable que si le signal en entrée est une sinusoïde définie sur $\mathbb{Z}$ (i.e. tous les entiers positifs et négatifs). Cette affirmation peut aussi se mettre sous la forme

$$\mathcal{H}\left[e^{j2\pi f_0 n T_e}\right] = \hat{H}(f_0) e^{j2\pi f_0 n T_e}$$

5.3 Repliement de spectre

Dans cette section nous nous intéressons à la relation qui doit exister entre la transformée de Fourier d'un signal temps continu $s(t)$ et la transformée de Fourier à temps discret d'un signal échantillonné $s_n = s(nT_e)$ (ou $s_n = \frac{1}{2}s(nT_e^-) + \frac{1}{2}s(nT_e^+)$ le cas échéant comme indiqué dans la remarque 1). On considère tout d'abord des signaux non-périodiques. Cette relation est donnée par

$$\frac{1}{f_e}\mathbb{TFTD}[s_n](f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{TF}[s(t)](f - kf_e) \tag{5.4}$$

On peut remarquer $\mathbb{TFTD}[s_n](f)$ est périodique alors que $\mathrm{TF}[s(t)](f)$ ne l'est pas. Cette contradiction est résolue dans (5.4) en superposant toutes les fonctions construites à partir de $\mathrm{TF}[s(t)](f)$ et décalées de kf_e avec k un entier positif ou négatif. Cette superposition infinie produit une fonction périodique. Il faut faire attention que si on représente souvent les transformées de Fourier au moyen de modules, ce ne sont pas les modules qui sont ajoutés dans (5.4) mais les valeurs complexes de ces transformées de Fourier. La justification de (5.4) provient de la ressemblance entre ces deux formules

$$s_n = \frac{1}{f_e}\int_{-f_e/2}^{f_e/2} \mathbb{TFTD}[s_n](f) e^{j2\pi f n T_e}\, df$$

$$s(nT_e) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{TF}[s(t)](f) e^{j2\pi f n T_e}\, df$$

(5.4) rappelle que s'il est possible de calculer $\mathbb{TFTD}[s_n]$ à partir de $\mathrm{TF}[s(t)]$ il n'est pas possible de faire l'inverse et de trouver $\mathrm{TF}[s(t)](f)$ à partir de $\mathbb{TFTD}[s_n]$. Ce constat est cohérent avec le fait que si on peut échantillonner un signal $s(t) \mapsto s_n$ il y a toujours une ambigüité dans la transformation inverse, transformation que l'on appelle interpolation, ambigüité que l'on peut lever lorsqu'on impose au signal $s(t)$ une contrainte supplémentaire celle du critère de Shannon-Nyquist.

Plus généralement lorsqu'on considère un signal temps continu

$$\frac{1}{f_e}\mathrm{TF}[s_n](f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{TF}[s(t)](f - kf_e) \tag{5.5}$$

En particulier cette relation (5.5) peut être utilisée pour calculer la transformée de Fourier d'un signal temps discret défini par $y_n = \cos(2\pi f_0 n T_e)$ échantillonné à la fréquence f_e. Un tel signal est périodique quand $f_0 T_e$ est un rationnel (c'est-à-dire qu'il s'agit d'un nombre qui peut s'écrire comme le quotient de deux entiers). Considérer y_n comme non-périodique et par suite chercher à appliquer la transformée de Fourier à temps discret pose un problème dans la mesure où l'expression n'est pas définie au sens des outils classiques et pour cause le résultat est une somme infinie de Diracs. En revanche (5.5) permet justement d'obtenir le résultat simplement. y_n est l'échantillonnage de $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ dont la transformée de Fourier est

$$\hat{X}(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

L'application (5.5) permet alors d'affirmer que la transformée de Fourier de y_n est

$$\hat{Y}(f) = \frac{f_e}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\delta(f - f_0 - kf_e) + \delta(f + f_0 - kf_e)\right)$$

5.4 Critère de Shannon-Nyquist

Un signal vérifie le critère de Shannon-Nyquist vis-à-vis de la fréquence d'échantillonnage f_e si

$$\hat{S}(f) = 0 \quad \text{pour} \quad f \notin]-f_e/2, f_e/2[$$

Ce critère peut aussi s'exprimer en calculant f_{max}, la fréquence au-delà de laquelle la transformée de Fourier de $s(t)$ est nulle

$$f\text{max} = \sup_f \{f \,|\, |\hat{S}(f)| > 0\}$$

et en imposant que

$$f\text{max} < \frac{f_e}{2}$$

On démontre qu'alors on peut retrouver $s(t)$ à partir de son signal échantillonné à la fréquence f_e : $s_n = s(\frac{n}{f_e})$ et (5.4) se simplifie en

$$\frac{1}{f_e}\mathbb{TFTD}\left[s_n\right](f) \;=\; \text{TF}\left[s(t)\right](f)$$

5.5 Interpolation et reconstruction d'un signal

L'interpolation d'un signal temps discret vers un signal temps continu signifie en général chercher un signal temps continu en s'aidant d'un certain nombre d'informations sur ce que devrait être le signal temps continu. En traitement du signal, l'interpolation prend un sens plus explicite. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux signaux non-périodiques. Le signal temps continu $x(t)$ recherché coïncide avec x_n aux instants nT_e et ce signal doit avoir une transformée de Fourier nulle en dehors des fréquences $[-f_e/2, f_e/2]$ et cette transformée de Fourier doit coïncider avec $\frac{1}{f_e}\mathbb{TFTD}[xn]$ dans l'intervalle $[-f_e/2, f_e/2]$. f_e désigne la fréquence d'échantillonnage du signal temps discret à interpoler.

En pratique on cherche rarement à calculer $x(t)$ pour tous les instants mais plutôt en un isntant en particulier ou en un ensemble d'instants régulièrement répartis et dans ce cas on parle plutôt de sur-échantillonnage ou éventuellement de sous-échantillonnage.

Le signal recherché vérifie le critère de Shannon-Nyquist et (5.4) permet d'écrire

$$x(t) = \text{TF}^{-1}\left[\frac{1}{f_e}\mathbb{TFTD}[x_n](f)\mathbf{1}_{[-f_e/2,f_e/2]}(f)\right](t) \tag{5.6}$$

Ainsi l'interpolation peut s'interprêter comme le fait d'appliquer (i.e. mutliplier) une porte ($\mathbf{1}_{[-f_e/2,f_e/2]}(f)$) sur le spectre périodique de période f_e de x_n ($\mathbb{TFTD}[x_n](f)$) et d'appliquer la transformée de Fourier inverse.

On peut aussi écrire sous la forme d'une série infinie

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \frac{sin f_e \pi(t - nT_e)}{f_e \pi(t - nT_e)} \tag{5.7}$$

Le signal interpolé peut alors aussi se voir comme une superposition de courbes en sinus cardinales $\frac{sin f_e \pi(t-nT_e)}{f_e \pi(t-nT_e)}$ dont le lobe principal est de largeur $2T_e$ et dont les autres lobes sont de largeur T_e, ces courbes sont décalés les unes par rapport aux autres de T_e, elles sont nulles à tous les instants kT_e sauf en un instant où se trouve leur maximum [1].

La formule (5.7) se déduit de (5.6)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f_e}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-j2\pi f n T_e}\right)\mathbf{1}_{[-f_e/2,f_e/2]}(f)e^{j2\pi f t}\,df$$

[1] On peut noter que le noyau aurait pu aussi s'écrire $\frac{sin f_e \pi t}{f_e \pi(t-nT_e)}$ car $\sin(f_e \pi n T_e) = \sin(\pi n) = 0$. Cependant le noyau s'écrit en général de l'autre façon car elle montre que la formule s'exprime au moyen d'une fonction appelée *sinus cardinal ingénieur*.

La fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[-f_e/2,f_e/2]}(f)$ permet de modifier les bornes de l'intégrale. Les propriétés des fonctions exponentielles permettent alors d'écrire que

$$x(t) = \int_{-f_e/2}^{f_e/2} \frac{1}{f_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f(t-nT_e)}\, df$$

On échange le signe somme et l'intégrale

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} e^{j2\pi f(t-nT_e)}\, df$$

L'évaluation de l'expression intégrale permet de conclure

$$\frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} e^{j2\pi f(t-nT_e)}\, df = \frac{1}{f_e} \left[\frac{e^{j2\pi f(t-nT_e)}}{j2\pi f(t-nT_e)} \right]_{-f_e/2}^{f_e/2} = \frac{sin f_e \pi (t-nT_e)}{f_e \pi (t-nT_e)}$$

Par extension il est possible d'utiliser (5.7) pour interpoler un signal x_n temps discret périodique de période N échantillonné à la fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$. On obtient alors un signal $x(t)$ temps continu périodique de période NT_e dont le spectre est composé de raies en les fréquences $f_k = \frac{k}{NT_e}$ avec $k < N/2$.

5.6 Sous-échantillonnage

Sous-échantillonner un signal consiste à construire un nouveau signal y_n à partir de x_n dont la nouvelle fréquence d'échantllonnage f_e^Y est plus faible que la fréquence d'échantillonnage de x_n, f_e^X. La nouvelle période d'échantillonnage et par suite la durée entre les nouveaux échantillons successifs auront augmentés $T_e^Y > T_e^X$.

Implicitement, ce qu'on appelle sous-échantillonner un signal, c'est trouver le signal à une fréquence plus faible qui conserve autant que possible les mêmes informations. Pour simplifier, on considère ici que x_n et y_n sont des signaux non-périodiques. Le spectre du signal sous-échantillonné ($\hat{Y}(f) = \mathbb{TFTD}[y_n](f)$) est périodique et sa période est une bande de fréquence plus étroite que celle dont est périodique le spectre de x_n. Le signal sous-échantillonné est défini par le fait que son spectre coïndice avec celui de x_n sur $[-f_e^Y/2, f_e^Y/2]$ à un facteur près.

$$\forall f \in [-f_e^Y/2, f_e^Y/2], \quad \mathbb{TFTD}[y_n](f) = \mathbb{TFTD}[x_n](f)$$

Pour un certain nombre d'applications, $f_e^Y = f_e^X/M$ avec parfois $M = 2$ ou $M = 3$. La façon d'obtenir ce signal y_n consiste à passer par un intermédiaire z_n qui a la même fréquence d'échantillonnage que x_n et les mêmes informations que y_n. Ce procédé peut se voir comme une conséquence du critère de Shannon-Nyquist qui impose à z_n d'avoir le même spectre que x_n sur $[-f_e^Y/2, f_e^Y/2]$ et d'avoir un spectre nul sur le complémentaire de cet intervalle au sein de l'intervalle $[-f_e^X/2, f_e^X/2]$.

$$\forall f \in [-f_e^X/2, -f_e^Y/2] \bigcup [f_e^Y/2, f_e^X/2], \quad \mathbb{TFTD}[z_n](f) = 0$$
$$\forall f \in [-f_e^Y/2, f_e^Y/2], \quad \mathbb{TFTD}[z_n](f) = \mathbb{TFTD}[x_n](f)$$

On utilise un filtre pour calculer z_n à partir de x_n. Et on calcule y_n à partir de z_n en prélevant un échantillon tous les M échantillons.

$$z_n = \mathcal{H}[x_n][n] \text{ et } y_n = M z_{nM}$$

Techniquement, c'est au moment de la réduction de la fréquence que risque d'apparaître un facteur multiplicatif $\frac{f_e^Y}{f_e^X}$ si on ne met pas le coefficient M, mais parfois cette normalisation est faite en modifiant le filtre appliqué entre x_n et z_n.

5.7 Sur-échantillonnage

Sur-échantillonner un signal consiste à construire un nouveau signal y_n à partir de x_n dont la nouvelle fréquence d'échantillonnage f_e^Y est plus élevée que la fréquence d'échantillonnage de x_n, f_e^X. La nouvelle période d'échantillonnage T_e^Y et par suite la durée entre les échantillons successifs auront diminué $T_e^Y < T_e^X$.

Implicitement, ce qu'on appelle sur-échantillonner un signal, c'est trouver le signal à une fréquence plus élevée qui n'a pas ajouté d'autres informations à celles qui se trouvaient dans x_n. Pour simplifier, on considère ici que x_n et y_n sont des signaux non-périodiques. Le spectre du signal sur-échantillonné ($\hat{Y}(f) = \mathbb{TFTD}[y_n](f)$) est périodique sur une bande de fréquence f_e^Y plus large que celle du spectre de x_n, f_e^X. Le signal sur-échantillonné est défini par le fait que son spectre coïncide sur la bande spectrale commune $[-f_e^X/2, f_e^X/2]$ et qu'il est nul sur la bande spectrale complémentaire dans $[-f_e^Y/2, f_e^Y/2]$.

$$\forall f \in [-f_e^X/2, f_e^X/2], \quad \mathbb{TFTD}[y_n](f) = \mathbb{TFTD}[x_n](f)$$
$$\forall f \in [-f_e^Y/2, -f_e^X/2] \bigcup [f_e^X/2, f_e^Y/2], \quad \mathbb{TFTD}[y_n](f) = 0$$

Pour un certain nombre d'applications, $f_e^Y = M f_e^X$ avec parfois $M = 2$ ou $M = 3$. La façon d'obtenir ce signal y_n consiste à passer par un intermédiaire z_n qui a les mêmes informations que x_n et la même fréquence d'échantillonnage que y_n. La différence par rapport au sous-échantillonnage est qu'ici, on modifie d'abord la fréquence d'échantillonnage en passant de x_n à z_n puis on applique un filtre de façon à transformer z_n en y_n. La réponse fréquentielle de ce filtre doit vérifier idéalement

$$\forall f \in [-f_e^Y/2, -f_e^X/2] \bigcup [f_e^X/2, f_e^Y/2], \quad \hat{H}(f) = 0$$
$$\forall f \in [-f_e^X/2, f_e^X/2], \quad \hat{H}(f) = 1$$

$$z_{nM} = M x_n \text{ et } y_n = \mathcal{H}[z_n][n]$$

Techniquement, c'est au moment de l'augmentation de la fréquence que risque d'apparaître un facteur multiplicatif $\frac{f_e^Y}{f_e^X}$ si on ne met pas le coefficient M, mais parfois cette normalisation est faite en modifiant le filtre appliqué entre x_n et z_n.

On peut remarquer que si on n'applique que la première étape, rajout de $M-1$ zéros, le spectre est bien périodique sur une période de fréquence plus large ($f_e^Y = M f_e^X$), il est cependant aussi égal à celui de x_n sur cette bande plus large. C'est le fait d'imposer que le spectre du signal sur-échantillonné y_n est nul sur la bande complémentaire qui fait que les échantillons rajoutés ne restent pas nuls lors de la deuxième étape.

Chapter 6

Filtres et descripteurs de signaux : Cours EBis

6.1 Filtres analgoqiques et produit de convolution en temps continu

Nous nous intéressons ici aux signaux à temps continu.

Le produit de convolution est une opération définie sur des signaux temps continu non-périodiques $x(t)$ et $y(t)$. Le résultat du produit de convolution est aussi un signal temps continu non-périodique $z(t)$.

$$z(t) = x(t) \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau)\, d\tau \tag{6.1}$$

Dans la notation $z(t) = x(t) \star y(t)$, les différents t ne sont pas identiques, il s'agit d'un abus de notation. L'expression à l'intérieur de l'intégrale peut s'écrire différemment en échangeant τ et $t-\tau$, un moyen mémotechnique pour vérifier la formule est de vérifier que la somme des arguments de x et de y à l'intérieur de l'expression intégrale est égale à l'argument de z.

Le produit de convolution vérifie les propriétés auxquelles on peut s'attendre : commutativité $x(t) \star y(t) = y(t) \star x(t)$, associativité $x(t) \star (y(t) \star z(t)) = (x(t) \star y(t)) \star z(t)$, linéarité à gauche $(\lambda x(t)) \star y(t) = \lambda(x(t) \star y(t))$ et $(x(t)+y(t)) \star z(t) = x(t) \star z(t) + y(t) \star z(t)$ et linéarité à droite $x(t) \star (\lambda y(t)) = \lambda(x(t) \star y(t))$ et $(x(t) \star (y(t)+z(t)) = x(t) \star y(t) + x(t) \star y(t)$. La fonction de dirac est l'élément neutre du produit de convolution $x(t) \star \delta(t) = x(t)$. Le produit de convolution vérifie une autre propriété importante : la transformée de Fourier du produit de convolution de deux signaux est le produit de leur transformée de Fourier.

$$\mathrm{TF}\left[x(t) \star y(t)\right](f) = \mathrm{TF}\left[x(t)\right](f)\, \mathrm{TF}\left[y(t)\right](f)$$

L'intérêt du produit de convolution est justement que tout filtre linéaire temps invariant $\mathcal{H}$ peut être défini au moyen d'un signal appelé réponse impulsionnelle $h(t)$ et du produit de convolution

$$\mathcal{H}[x(t)] = h(t) \star x(t)$$

Par exemple un filtre à retard $\mathcal{H}[x(t)](t) = x(t-t_0)$ a pour réponse impulsionnelle $h(t) = \delta(t-t_0)$.

Si on place un filtre $\mathcal{H}_2$ en sortie d'un filtre $\mathcal{H}_1$ et que les réponses impulsionnelles de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont $h_1(t)$ et $h_2(t)$ alors la composition de ces deux filtres est un filtre de réponse impulsionnelle $h_1(t) \star h_2(t)$. En particulier si l'entrée est une fonction de Dirac $x(t) = \delta(t)$, alors la sortie est la réponse impulsionnelle $y(t) = h(t)$. C'est cette observation qui a donné le nom de réponse impulsionnelle (i.e. réponse à une impulsion).

La réponse fréquentielle d'un filtre est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle

$$\widehat{H}(f) = \mathrm{TF}\left[h(t)\right](f)$$

Cette réponse fréquentielle est parfois aussi appelée réponse harmonique. La réponse fréquentielle est a priori à valeurs complexes. On réprésente généralement le module $|\widehat{H}(f)|$ en fonction de la fréquence f et aussi la phase $\arg(\widehat{H}(f))$ en fonction de la fréquence f. On peut aussi représenter la réponse fréquentielle avec un diagramme de Bode. Dans ce cas on utilise la pulsation $\omega = \frac{f}{2\pi}$. Il s'agit d'une échelle logarithmique à la fois sur l'axe des ordonnées et sur l'axe des abscisses. On représente avec une échelle en décibel $20 \log_1 0(|\widehat{H}(f)|)$ en fonction de $log_1 0(\omega)$ où en fonction de

ω quand ω suit une échelle logarithmique. On représente aussi la phase $\arg(\widehat{H}(f))$ en degré ou en radian en fonction de $log_10(\omega)$ où en fonction de ω quand ω suit une échelle logarithmique. L'intérêt de cette représentation est qu'un filtre comme $H(p) = \frac{1}{p+1}$ est approximativement identique une courbe constante jusqu'à $\omega = 1$ et ensuite une courbe décroissante avec une pente à -20dB/décade.

On définit aussi la réponse indicielle $a(t)$ qui est la réponse du filtre à un échelon $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$. Si $x(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ alors $y(t) = a(t)$.

6.2 Filtres numériques et produit de convolution en temps discret

Nous nous intéressons ici aux signaux à temps discret.

Le produit de convolution est une opération définie sur des signaux temps discret non-périodiques x_n et y_n. Le résultat du produit de convolution est aussi un signal temps discret non-périodique z_n.

$$z_n = x_n \overset{d}{*} y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k y_{n-k} \tag{6.2}$$

Dans la notation $z_n = x_n \overset{d}{*} y_n$, les différents n ne sont pas identiques, il s'agit d'un abus de notation. L'expression à l'intérieur du signe somme peut s'écrire différemment en échangeant k et $n-k$, un moyen mémotechnique pour vérifier la formule est de vérifier que la somme des arguments de x et de y à l'intérieur de l'expression intégrale est égale à l'argument de z.

Le produit de convolution vérifie les propriétés auxquelles on peut s'attendre : commutativité $x_n \overset{d}{*} y_n = y_n \overset{d}{*} x_n$, associativité $x_n \overset{d}{*} (y_n \overset{d}{*} z_n) = (x_n \overset{d}{*} y_n) \overset{d}{*} z_n$, linéarité à gauche $(\lambda x_n) \overset{d}{*} y_n = \lambda(x_n \overset{d}{*} y_n)$ et $(x_n + y_n) \overset{d}{*} z_n = x_n \overset{d}{*} z_n + y_n \overset{d}{*} z_n$ et linéarité à droite $x_n \overset{d}{*} (\lambda y_n) = \lambda(x_n \overset{d}{*} y_n)$ et $(x_n \overset{d}{*} (y_n + z_n) = x_n \overset{d}{*} y_n + x_n \overset{d}{*} y_n$. La fonction de dirac est l'élément neutre du produit de convolution $x_n \overset{d}{*} \delta_n = x_n$. Le produit de convolution vérifie une autre propriété importante : la transformée de Fourier à temps discret du produit de convolution de deux signaux est le produit de leur transformée de Fourier à temps discret.

$$\mathbb{TFTD}\left[x_n \overset{d}{*} y_n\right](f) = \mathbb{TFTD}\left[x_n\right](f)\mathbb{TFTD}\left[y_n\right](f)$$

L'intérêt du produit de convolution est justement que tout filtre linéaire temps invariant $\mathcal{H}$ peut être défini au moyen d'un signal appelé réponse impulsionnelle h_n et du produit de convolution

$$\mathcal{H}[x_n] = h_n \overset{d}{*} x_n$$

En particulier pour un filtre de réponse impulsionnelle finie (c'est-à-dire un filtre qui n'a qu'un nombre fini de termes non-nuls), la relation entrée-sortie s'écrit

$$y_n = h_{-P}x_{n+P} + h_{-P+1}x_{n+P-1} + ... + h_0 x_n + h_1 x_{n-1} + ... + h_N x_{n-N}$$

où x_n et y_n sont l'entrée et la sortie de ce filtre et en supposant qu'en dehors de $n \in \{-P...N\}$, $h_n = 0$.

Par exemple un filtre à retard $\mathcal{H}[x_n]_n = x_{n-n_0}$ a pour réponse impulsionnelle $h_n = \delta_{n-n_0}$.

Si on place un filtre $\mathcal{H}_2$ en sortie d'un filtre $\mathcal{H}_1$ et que les réponses impulsionnelles de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont h_n^1 et h_n^2 alors la composition de ces deux filtres est un filtre de réponse impulsionnelle $h_n^1 \overset{d}{*} h_n^2$.

La réponse fréquentielle d'un filtre est la transformée de Fourier à temps discret de la réponse impulsionnelle

$$\widehat{H}(f) = \mathbb{TFTD}\left[h_n\right](f)$$

6.3 Intercorrélation, autocorrélation et densité spectrale

On définit l'intercorrélation, l'autocorrélation et la densité spectrale pour des signaux temps continu non-périodiques, temps discret non-périodiques et temps discret périodiques. L'intercorrélation indique dans quelle mesure un signal est similaire à un autre signal décalé dans le temps. L'autocorrélation indique dans quelle mesure un signal décalé dans le temps est similaire à lui-même. La densité spectrale de puissance ou d'énergie aide à décrire comment un signal est similaire à lui-même.

On parle d'énergie pour les signaux non-périodiques, leur puissance étant nulle et on parle de puissance pour les signaux périodiques, leur énergie étant infinie.

6.3.1 Signaux temps continu non-périodiques

L'intercorrélation s'applique à deux signaux temps continu non-périodiques $x(t)$ et $y(t)$ et produit un signal temps continu non-périodique

$$\gamma_{x,y}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t-\tau)\,dt \tag{6.3}$$

Ainsi $\gamma_{x,y}(\tau)$ mesure la similarité entre le signal $x(t)$ et le signal $y(t)$ retardé de τ. Il est un outil efficace pour indiquer l'existence d'un élément de signal de $x(t)$ qui se trouverait aussi dans $y(t)$ mais avec un décalage dans le temps provoqué par exemple par un écho. Lorsqu'on applique l'intercorrélation à des signaux complexes, le terme $y(t-\tau)$ dans (6.3) doit être conjugué (i.e. le signe de la partie imaginaire doit être modifié).

On définit la densité spectrale d'énergie pour deux signaux comme la transformée de Fourier de l'intercorrélation

$$\Gamma_{xy}(f) = \mathrm{TF}\left[\gamma_{xy}(t)\right](f)$$

Le théorème de Wiener Kintchine montre que cette densité spectrale d'énergie peut aussi s'exprimer en fonction des transformée de Fourier des deux signaux

$$\Gamma_{xy}(f) = \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(f)}$$

L'utilisation de l'intercorrélation est très différente de l'utilisation du produit de convolution, il y a cependant une certaine proximité mathématique entre les deux outils.

$$\gamma_{xy}(\tau) = \left(x(t) \star \tilde{y}(t)\right)(\tau) \text{ où } \tilde{y}(t) = y(-t)$$

On retrouve aussi cette proximité mathématique dans le domaine fréquentiel avec le théorème de Wiener Kintchine qui ressemble au fait que la transformée de Fourier de la sortie est le produit de la transformée de Fourier de l'entrée par la réponse fréquentielle.

L'autocorrélation s'applique à un signal temps continu non-périodique $x(t)$ et est défini par

$$\gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)\,dt \tag{6.4}$$

L'autocorrélation permet par exemple de différencier un signal qui varie très rapidement d'un signal qui varie plus lentement. Lorsqu'on applique l'autocorrélation à un signal à valeurs complexes, le terme $x(t-\tau)$ dans (6.4) doit être conjugué.

L'autocorrélation est une fonction symétrique et maximale en $\tau = 0$. La valeur en $\tau = 0$ de l'autocorrélation est l'énergie du signal.

$$\gamma_x(-\tau) = \gamma_x(\tau) \text{ et } |\gamma_x(\tau)| \leq \gamma_x(0) = E_x$$

De même que pour l'intercorrélation, on définit aussi la densité spectrale d'énergie pour un signal $x(t)$ et celle-ci s'exprime en fonction de la transformée de Fourier de $x(t)$.

$$\Gamma_x(f) = \mathrm{TF}\left[\gamma_x(t)\right](f) = \left|\widehat{X}(f)\right|^2$$

L'utilisation de (4.2) montre que

$$E_x = \frac{1}{f_e}\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(f)\,df$$

C'est la raison pour laquelle on parle de densité spectrale d'énergie.

Cet outil est utilisé en théorie des signaux aléatoires pour interprêter les signaux aléatoires comme étant la sortie d'un filtre linéaire dont l'entrée serait un bruit blanc, c'est-à-dire un signal aléatoire particulier au sens qu'on ne trouverait aucune corrélation entre les valeurs prises par ce signal en différents instants. Cet outil permet ainsi d'estimer le module au carré de la réponse fréquentielle de ce filtre.

6.3.2 Signaux temps discret non-périodiques

L'intercorrélation peut aussi s'appliquer à deux signaux temps discret non-périodiques x_n et y_n et produit un signal temps continu non-périodique

$$\gamma_{x,y}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n y_{n-k} \tag{6.5}$$

Ainsi $\gamma_{x,y}[k]$ mesure la similarité entre le signal x_n et le signal y_n retardé de k. Lorsqu'on applique l'intercorrélation à des signaux complexes, le terme y_{n-k} dans (6.5) doit être conjugué (i.e. le signe de la partie imaginaire doit être modifié).

On définit la densité spectrale d'énergie pour deux signaux comme la transformée de Fourier à temps discret de l'intercorrélation

$$\Gamma_{xy}(f) = \mathbb{TFTD}\left[\gamma_{xy}[n]\right](f)$$

Le théorème de Wiener Kintchine montre que cette densité spectrale d'énergie peut aussi s'exprimer en fonction des transformée de Fourier des deux signaux

$$\Gamma_{xy}(f) = \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(f)}$$

De même qu'à temps continu, il y a encore la même proximité mathématique entre l'intercorrélation et le produit de convolution.

$$\gamma_{xy}[k] = \left(x_n \overset{d}{*} \tilde{y}_n\right)[k] \text{ où } \tilde{y}_n = y_{-n}$$

L'autocorrélation s'applique à un signal temps discret non-périodique x_n et est défini par

$$\gamma_x[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n x_{n-k} \tag{6.6}$$

Lorsqu'on applique l'autocorrélation à un signal à valeurs complexes, le terme x_{n-k} dans (6.6) doit être conjugué.

L'autocorrélation est une fonction symétrique et maximale en $\tau = 0$. La valeur en $\tau = 0$ de l'autocorrélation est l'énergie du signal.

$$\gamma_x[-k] = \gamma_x[k] \text{ et } \gamma_x[k] \leq \gamma_x[0] = E_x$$

De même que pour l'intercorrélation, on définit aussi la densité spectrale d'énergie pour un signal x_n et celle-ci s'exprime en fonction de la transformée de Fourier à temps discret de x_n.

$$\Gamma_x(f) = \mathbb{TFTD}\left[\gamma_x[n]\right](f) = \left|\widehat{X}(f)\right|^2$$

A partir de données expérimentales composées de N échantillons des signaux x_n et y_n on peut estimer leur intercorrélation ($k \geq 0$)

$$\widehat{\gamma}_{xy}[k] = \frac{1}{N-k}\sum_{n=k}^{N-1} x_n y_{n-k} \tag{6.7}$$

Si $k < 0$,

$$\widehat{\gamma}_{xy}[k] = \frac{1}{N+k}\sum_{n=0}^{N+k-1} x_n y_{n-k} \tag{6.8}$$

La normalisation par $N-k$ et le fait que la variable n parcourt l'ensemble $\{0...N-k-1\}$ composé de $N-k$ éléments provient justement de ce quand on décale un signal de k échantillons par rapport à l'autre, il n'y a plus que $N-k$ échantillons qui peuvent être pris en compte. Le chapeau dans $\widehat{\gamma}_{xy}[k]$ ne signifie qu'on a effectué une transformée de Fourier mais qu'il s'agit d'une quantité estimée, qu'il faut distinguer de la définition de l'intercorrélation.

A partir de données expérimentales composées de N échantillons d'un signal x_n, on peut aussi estimer son autocorrélation

$$\widehat{\gamma}_x[k] = \widehat{\gamma}_{xy}[k]$$

6.3.3 Signaux temps discret périodiques

L'intercorrélation peut aussi s'appliquer à deux signaux temps discret périodiques x_n et y_n de périodes N et produit un signal temps continu périodique de période N

$$\gamma_{x,y}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n y_{n-k} \tag{6.9}$$

Lorsqu'on applique l'intercorrélation à des signaux complexes, le terme y_{n-k} dans (6.9) doit être conjugué (i.e. le signe de la partie imaginaire doit être modifié). La normalisation par N et le fait que la variable n parcourt l'ensemble $\{0...N-1\}$ composé de N éléments est possible du fait que les signaux sont périodiques et que par exemple y_{-1} est en fait égal à y_{N-1}. On peut remarquer que aussi bien dans le cas présent que pour (6.7) on peut calculer l'intercorrélation à partir de la seule connaissance de N données de x_n et de y_n, les formules sont différentes et reposent sur des suppositions différentes. C'est en fonction de l'application que l'on appliquera (6.9) ou (6.7).

On définit la densité spectrale de puissance pour deux signaux comme la transformée de Fourier discrète de l'intercorrélation

$$\Gamma_{xy}[k] = \mathbb{TFD}\left[\gamma_{xy}[n]\right][k]$$

Le théorème de Wiener Kintchine montre que cette densité spectrale de puissance peut aussi s'exprimer en fonction des transformée de Fourier des deux signaux

$$\Gamma_{xy}[k] = \widehat{X}[k]\overline{\widehat{Y}[k]}$$

A la différence du cas temps discret non-périodique, la proximité mathématique est avec le produit de convolution circulaire.

L'autocorrélation s'applique aussi à un signal temps discret périodique x_n et est défini par

$$\gamma_x[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n x_{n-k} \tag{6.10}$$

Lorsqu'on applique l'autocorrélation à un signal à valeurs complexes, le terme x_{n-k} dans (6.10) doit être conjugué.

L'autocorrélation est une fonction symétrique et maximale en $\tau = 0$. La valeur en $\tau = 0$ de l'autocorrélation est la puissance du signal.

$$\gamma_x[-k] = \gamma_x[k] \text{ et } \gamma_x[k] \leq \gamma_x[0] = P_x$$

De même que pour l'intercorrélation, on définit aussi la densité spectrale de puissance pour un signal x_n et celle-ci s'exprime en fonction de la transformée de Fourier discrète de x_n.

$$\Gamma_x[k] = \mathbb{TFD}\left[\gamma_x[n]\right][k] = \left|\widehat{X}_k\right|^2$$

L'utilisation de (4.12) montre que

$$P_x = \sum_{k=0}^{N-1} \Gamma_x[k]$$

C'est la raison pour laquelle Γ_x est appelée densité spectrale de puissance.

Chapter 7

Fonctions de transfert : Cours 1F

L'objectif de ce chapitre est de présenter une nouvelle transformation qui présente certaines similarités avec la transformation de Fourier : la transformée de Laplace pour les signaux à temps continu. Le chapitre suivant traite de la transformée en Z pour les signaux à temps discret. Ces deux transformations sont plus adaptées à l'étude des filtres analogiques (et numériques). Elles ne permettent pas de prendre en compte le passé lointain d'un signal (en particulier on ne pas l'appliquer à des signaux périodiques), mais cette limitation permet une plus grande liberté dans l'utilisation de cet outil et une simplification des calculs.

7.1 Définition de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace s'applique à des signaux temps continu $x(t)$ causaux. De tels signaux sont définis par

$$t < 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0 \tag{7.1}$$

Il s'agit de signaux qui sont nuls pour tous les instants précédent l'instant nul. La partie à gauche de l'axe des ordonnées de la courbe représentative de tels signaux est sur l'axe des abscisses.

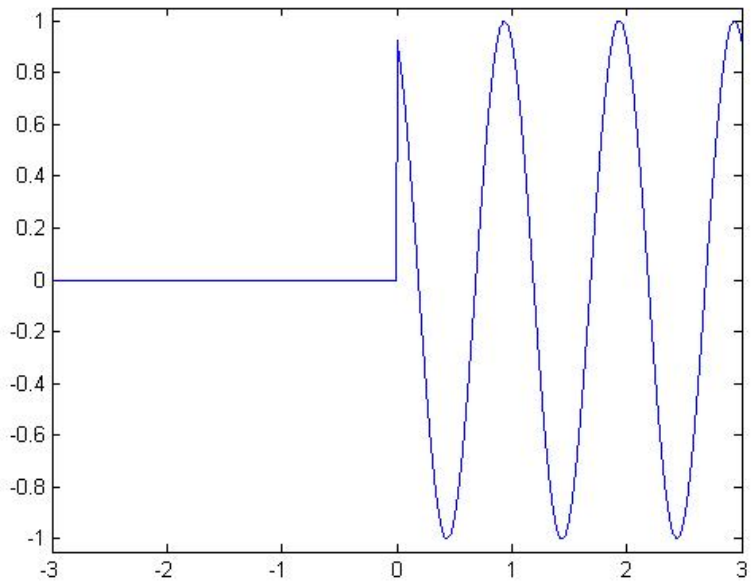


Figure 7.1: Représentation graphique d'un signal temps continu et causal.

La figure 7.1 montre un signal temps continu causal.

La transformée de Laplace est une transformation qui s'applique à un signal temps continu causal $x(t)$ et qui produit une fonction de variable complexe p définie seulement pour les complexes dont la partie réelle est strictement

positive.

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt}\,dt \tag{7.2}$$

On peut observer que la borne inférieure de l'intégrale est 0 et non $-\infty$ précisément parce que $x(t)$ est un signal causal.

Le fait de se limiter aux complexes à partie réelle strictement positive fait que l'intégrale converge pratiquement quelle que soit le signal $x(t)$ considéré parce que $|e^{-pt}|$ est majorée par $e^{-\Re(p)t}$ qui est une fonction qui décroît vers zéro exponentiellement. Techniquement il suffit que $x(t)$ soit une fonction mesurable et majorée en valeure absolue par une fonction polynomiale pour que l'intégrale soit définie et prenne une valeure finie.

Pour définir la transformée inverse, il faudrait étendre la notion d'intégrale par rapport à une variable réelle à une notion plus générale définie sur le plan complexe. Cette notion existe, mais dans le cadre de ce cours, nous n'aurons pas besoin de cette notion. Nous utiliserons seulement le fait qu'il ne peut pas exister de vraies différences entre deux signaux causaux ayant la même transformée de Laplace (voir cours sur les intégrales de Lebesgue). Ainsi pour calculer la transformée de Laplace inverse, il suffit de deviner quel est le signal causal dont la transformée de Laplace donne le résultat souhaité. L'utilisation des propriétés de la transformée de Laplace permet en général de trouver le signal causal.

La transformée de Laplace présente de nombreuses similarités avec la transformée de Fourier. On considère un signal $x(t)$ pour lequel à la fois la tranformée de Fourier et la transformée de Laplace sont définis, $x(t)$ est à la fois temps continu causal (et non-périodique) et on note $X(p)$ sa transformée de Laplace et $\widehat{X}(f)$ sa transformée de Fourier. On suppose que $X(p)$ est encore définie sur l'axe des ordonnées (ce qui suppose par exemple que le signal $x(t)$ n'ait pas le comportement d'une sinusoïde quand t tend vers l'infini).

$$\widehat{X}(f) = X(j2\pi f) \tag{7.3}$$

Ceci signifie que la transformée d'un signal peut se lire en prolongeant (si tant est que cela est possible) la transformée de Laplace sur l'axe des ordonnées.

Nous verrons dans la partie suivante que les propriétés de la transformée de Laplace sont très similaires à la transformée de Fourier.

7.2 Propriétés de la transformée de Laplace

La notion de parité est relativement similaire, à ceci près qu'on ne peut bien sûr plus considérer les signaux symétriques par rapport à $t = 0$, de tels signaux ne sont pas causaux. On considère un signal $x(t)$ un signal causal et réel et $X(p)$ sa transformée de Laplace.

$$X(\bar{p}) = \bar{X}(p) \tag{7.4}$$

En particulier si $X(p)$ est un polynôme ou une fraction rationnelle (c'est-à-dire un quotient de polynômes), les coefficients utilisés sont nécessairement à valeurs réelles.

En $p = 0$, on a la relation suivante :

$$X(0) = \int_0^{+\infty} x(t)\,dt$$

Comme toutes les autres transformées vues en cours, la transformée de Laplace est aussi linéaire. On considère un signal $x(t)$ temps continu et causal et $x'(t) = ax(t)$. On note $X(p)$ et $X'(p)$ les deux transformées de Laplace.

$$X'(p) = aX(p) \tag{7.5}$$

On considère deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ temps continu et causaux et $z(t) = x(t) + y(t)$. On note $X(p)$, $Y(p)$ et $Z(p)$ les transformées de Laplace de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

$$Z(p) = X(p) + Y(p) \tag{7.6}$$

La transformée de Laplace a aussi une propriété relative au changement d'échelle de temps. On considère un signal temps continu causal $x(t)$ et $y(t) = x(\frac{t}{a})$ un signal obtenu par changement d'échelle de temps, ce signal est aussi causal. Les transformées de Laplace associées vérifient la relation suivante :

$$Y(p) = aX(ap) \tag{7.7}$$

Une propriété particulièrement remarquable des transformées de Laplace est qu'elle transforme l'intégration en une division par p et un dérivation par une multiplication par p. En toute rigueur il y a cependant quelques précautions à prendre pour éviter l'apparition de singularités ou pour les calculer.

On considère un signal $x(t)$ temps continu et causal qui en l'infini tend vers zéro ($\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$). On définit $y(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)\int_0^t x(\tau)\,d\tau$ Les deux transformées de Laplace vérifient les relations suivantes :

$$Y(p) = \frac{X(p)}{p} \tag{7.8}$$

On considère $x(t)$ un signal temps continu causal et continu en $t = 0$ ($\lim_{t\to 0} x(t) = 0$). On définit $y(t) = \frac{dx}{dt}|_t$. Les deux transformées de Laplace vérifient la relation suivante :

$$Y(p) = pX(p) \tag{7.9}$$

La transformée de Laplace transforme un produit de convolution en un produit de transformée de Laplace. On considère deux signaux temps continu et causaux $x(t)$ et $y(t)$. Etant continus, leur produit de convolution s'écrit

$$z(t) = \int_0^t x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau \tag{7.10}$$

Ce signal est aussi causal. La relation entre les transformées de Laplace $X(p)$, $Y(p)$ et $Z(p)$ de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ s'écrit

$$Z(p) = X(p)Y(p) \tag{7.11}$$

La transformée de Laplace transforme un produit de convolution en un produit de transformée de Laplace. On considère deux signaux temps continu et causaux $x(t)$ et $y(t)$. Etant causaux, leur produit de convolution s'écrit

$$z(t) = \int_0^t x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau \tag{7.12}$$

Ce signal est aussi causal. La relation entre les transformées de Laplace $X(p)$, $Y(p)$ et $Z(p)$ de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ s'écrit

$$Z(p) = X(p)Y(p) \tag{7.13}$$

Si on retarde un signal alors sa transformée de Laplace est transformé par l'équivalent d'un déphasage. On considère $x(t)$ un signal temps continu et causal et $x'(t)$ un signal retardé d'un temps égal à t_0 $x'(t) = x(t-t_0)$ alors

$$\widehat{X}'(p) = e^{-pt_0}X(p) \tag{7.14}$$

Lorsqu'on prolonge $X(p)$ et $X'(p)$ sur l'axe des ordonnées, on retrouve bien un déphasage : $X(p)$ et $X'(p)$ ont alors même module et ne diffèrent que par la phase.

La propriété relative à la modulation existe aussi pour les transformées de Laplace. On considère un signal temps continu et causal $x(t)$ et un signal modulé $x'(t) = e^{j2\pi f_0 t}x(t)$ alors la relation entre les deux transformées de Laplace est

$$X'(p) = X(p - j2\pi f_0) \tag{7.15}$$

Cette relation permet justement de retrouver l'idée que le spectre est alors décalé de f_0.

On considère maintenant quelques exemples de transformée de Laplace. Le premier est similaire à la transformée de Fourier.

$$\mathbb{TL}[\delta(t)] = 1 \tag{7.16}$$

Dans les trois exemples suivants, les transformées de Laplace sont clairement différentes des transformées de Fourier.

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{TL}\left[e^{-2t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)\right](p) & = & \frac{1}{p+2} \\
\mathbb{TL}\left[\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)\right](p) & = & \frac{1}{p} \\
\mathbb{TL}\left[\cos(2\pi f_0 t)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)\right](p) & = & \frac{1}{2}\frac{1}{p-j2\pi f_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+j2\pi f_0} \\
\mathbb{TL}\left[\sin(2\pi f_0 t)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)\right](p) & = & \frac{1}{2j}\frac{1}{p-j2\pi f_0} - \frac{1}{2j}\frac{1}{p+j2\pi f_0}
\end{array}$$

Il est tentant de vouloir retrouver la transformée de Laplace à partir de la transformée de Fourier, cela peut être une mauvaise idée en particulier s'il s'agit d'un signal constant ou périodique et ce même si le signal a été rendu causal par l'intermédiaire de la fonction $\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

7.3 Filtre analogique, causalité et fonction de transfert

On souhaite maintenant pouvoir appliquer cette transformation aux filtres analogiques. Mais pour cela il faut que la réponse impulsionnelle des filtres considérés soient causale.

On définit un filtre causal comme étant un filtre dont la réponse impulsionnelle est causale.

$$\mathcal{H} \text{ est causal} \quad \Leftrightarrow \quad h(t) \text{ est causal} \tag{7.17}$$

Il se trouve que la causalité peut être définie de manière équivalente par la propriété suivante. Un filtre est causal si une modification de l'entrée postérieure à un instant t_0 ne peut entraîner de conséquences sur la sortie pour $t < t_0$.

Les filtres utilisés pour modéliser des phénomènes qui s'écoulant dans le temps sont a priori causaux, ne serait-ce que parce qu'il n'est pas possible d'agir aujourd'hui sur les évènements du passé. Il n'est par exemple pas possible d'agir sur le volant d'une voiture pour après un accident faire en sorte qu'il n'y ait pas eu d'accident.

En revanche lorsqu'on utilise les filtres pour modéliser des phénomènes qui sont distribués spatialement, c'est le cas pour les images, les filtres considérés ne sont en général pas causaux et certaines précautions sont nécessaires.

On appelle fonction de transfert la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle d'un filtre analogique. On appelle gain d'un filtre le module de cette fonction de transfert et phase l'argument de cette fonction de transfert.

On dit que la fonction de transfert d'un filtre s'écrit sous la forme d'une fraction rationnelle s'il existe des coefficients $a_0...a_N$ et $b_0...b_M$

$$\widehat{H}(p) \;=\; \frac{b_0 + b_1 p + ... + b_M p^M}{a_0 + a_1 p + ... + a_N p^N} \tag{7.18}$$

De tels filtres sont parfois appelés filtres rationnels. En pratique les filtres que nous considérerons ont des fonctions de transfert qui s'écrivent sous la forme d'une fraction rationnelle.

De tels filtres peuvent aussi être modélisés par une équation différentielle

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + ... + a_N \frac{d}{dt^N} y(t) \;=\; b_0 x(t) + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + ... + b_M \frac{d}{dt^M} x(t) \tag{7.19}$$

En effet le produit par p s'interprête comme une dérivation par rapport au temps. De tels filtres peuvent aussi être simulés par un assemblage de condensateurs et de résistances. La réponse fréquentielle de tels filtres peut souvent (à condition que la fonction de transfert puisse être prolongée sur l'ensemble de l'axe imaginaire) se mettre sous la forme

$$\widehat{H}(f) \;=\; \frac{b_0 + b_1 j2\pi f + ... + b_M (j2\pi f)^M}{a_0 + a_1 j2\pi f + ... + a_N (j2\pi f)^N}$$

7.4 Critère de stabilité des filtres analogiques

Pour qu'on puisse utiliser un filtre comme modélisation d'un phénomène physique il est souhaitable que ce filtre soit stable. En général on attend trois propriétés :

- $y(t) \to 0$ quand $u(t) \to 0$

- $y(t)$ est borné quand $u(t)$ est borné.
- $|y-z| \to 0$ quand $|u-v| \to 0$.

où $u(t)$, $v(t)$ sont des entrées du filtre et $y(t)$ et $z(t)$ sont les sorties correspondantes. Il se trouve que pour les filtres que nous considérons ces trois propriétés sont équivalentes entre elles et c'est ce que nous appelerons la propriété de stabilité.

Nous considérons ici que des filtres rationnels, la stabilité est donc nécessairement déterminés par les valeurs prises par les coefficients qui définissent ces fractions rationnelles, mais donner une condition sur la valeur de ces coefficients seraient une tâche complexe. Au lieu de cela on définit la notion de zéro et de pôle.

On considère un filtre $\mathcal{H}$ de fonction de transfert $H(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$. P est un polynôme appelé numérateur et Q est un polynôme appelé dénominateur. On appelle zéros de $\mathcal{H}$ les racines de P et on appelle pôles de $\mathcal{H}$ les racines de Q.

La stabilité d'un filtre est déterminé par le lieu des pôles de $\mathcal{H}$.

$\mathcal{H}$ est stable si il n'y aucun pôle sur $\{p|\Re e(p) \geq 0\}$.

On peut aussi dire que $\mathcal{H}$ de fonction de transfert $H(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ est stable si

$$\forall p \text{ tel que } \Re e(p) \geq 0 \text{ on a } Q(p) \neq 0 \tag{7.20}$$

La décomposition en élément simple est un outil mathématique permettant d'écrire les fractions rationnelles (et donc en l'occurence les fonctions de transfert des filtres rationnels) sous une forme un peu différente.

On dit que p_0 est racine d'un polynôme Q si $Q(p_0) = 0$. On dit que cette racine est de multiplicité 1 si le polynôme s'annule en p_0 mais pas sa dérivée. On dit que p_0 est de multiplicité m si le polynôme Q et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ s'annulent en p_0 et que la dérivée à l'ordre m ne s'annulle pas en p_0. En fait pour un polynôme trouver les racines et leur multiplicité c'est factoriser le plus complètement un polynôme. Un résultat mathématique affirme en effet que, à condition de s'autoriser à considérer des racines à valeurs complexes, tout polynôme Q de degré n a toujours un ensemble de racines dont la somme des multiplicités est égale à n, et que si on note $p_0...p_M$ les racines de Q et $\alpha_0...\alpha_M$ les multiplicités de ces racines, alors il existe K un réel tel que $Q(p) = K(p-p_0)^{\alpha_0}..(p-p_M)^{\alpha_M}$.

On considère un filtre dont la fonction de transfert s'écrit sous la forme d'une fraction rationnelle $H(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$. On note $p_0...p_M$ les racines de Q et $\alpha_0...\alpha_M$ les multiplicités de ces racines. Il existe $a_0^0...\ a_0^{\alpha_0-1}\ ...\ a_M^0...a_M^{\alpha_M-1}$ tel que

$$H(p) = \frac{a_0}{p-p_0} + ... + \frac{a_0^{\alpha_0-1}}{(p-p_0)^{\alpha_0-1}} + ... + \frac{a_M}{p-p_M} + ... + \frac{a_M^{\alpha_M-1}}{(p-p_M)^{\alpha_M-1}} \tag{7.21}$$

Cette écriture s'appelle la décomposition en élément simple de $H(p)$. Il existe différentes techniques pour calculer ces coefficients. Mais sans connaître ces techniques, il est toujours possible trouver ces coefficients en cherchant à retrouver l'expression de départ.

La décomposition en élément simple est un outil permettant de trouver la réponse impulsionnelle d'un filtre à partir de sa fonction de transfert. Voici les étapes à effectuer.

1. Trouver les racines de Q avec leur ordre de multiplicité.
2. Ecrire la relation (7.21).
3. Calculer les valeurs des coefficients a_i^j.
4. Trouver des signaux causaux dont les transformées de Laplace coïncident avec les éléments de la décomposition.
   - Lorsqu'on a un pôle simple, on constate que
   $$\mathbb{TL}\left[e^{p_0 t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t)\right] = \frac{1}{p-p_0}$$
   - Lorsqu'on a un pôle double, on peut effectuer le calcul suivant :
   $$\begin{aligned}
   \tfrac{1}{(p-p_0)^2} &= -\tfrac{d}{dp}\left[\tfrac{1}{p-p_0}\right] = -\tfrac{d}{dp}\left[\int_0^\infty e^{-p_0 t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t)e^{-pt}\,dt\right] \\
   &= \int_0^\infty e^{-p_0 t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t)\tfrac{d}{dp}\left[-e^{-pt}\right]\,dt \\
   \tfrac{1}{(p-p_0)^2} &= \int_0^\infty e^{-p_0 t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t)\left[te^{-pt}\right]\,dt = \int_0^\infty te^{-p_0 t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t)e^{-pt}\,dt = \mathbb{TL}\left[te^{-p_0 t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t)\right]
   \end{aligned}$$

- Lorsqu'on a pôle d'ordre ν, on peut réitérer ce calcul jusqu'à l'ordre ν et ainsi prouver que

$$\frac{1}{(p-p_0)^\nu} = \mathbb{TL}\left[\frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}e^{p_0 t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t)\right] \tag{7.22}$$

  L'annexe C.2, p. 81, donne un exemple d'utilisation de cette formule dans un calcul.

5. En déduire la réponse impulsionnelle.

7.5 Filtres analogiques à phase linéaire

Un filtre est dit à phase linéaire si courbe représentative de la phase de la réponse fréquentielle en fonction de la fréquence est constituée d'une succession de droite de mêmes pentes. Il est rare que cette courbe soit une droite parce que la phase est en fait un angle souvent représenté entre $-\pi$ et π et qu'il a en général un saut quand l'une de ces deux extrémités est atteinte. On peut aussi dire qu'un filtre est à phase linéaire si en dehors d'un certain nombre de fréquences particulières, la dérivée de la phase est une constante.

$$\frac{d}{df}\arg\widehat{S}(f) = C^{\text{te}}$$

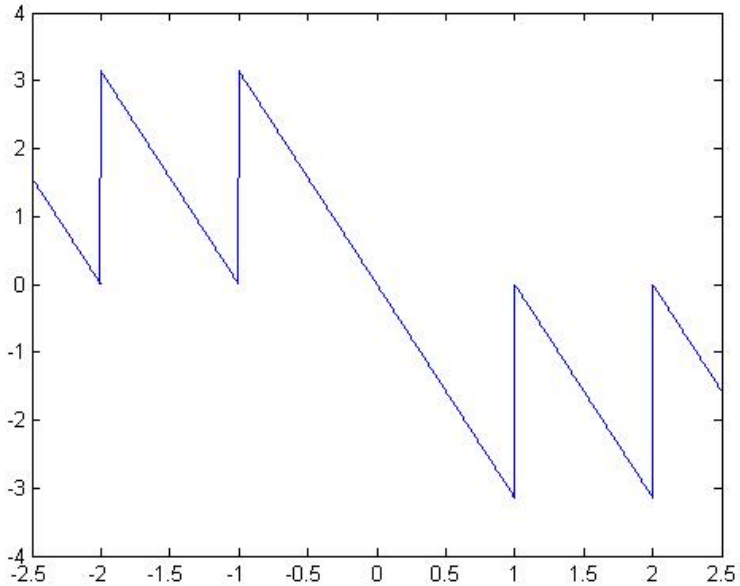


Figure 7.2: Représentation graphique de la phase de la réponse fréquentielle (rad) en fonction de la fréquence (Hz) du filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$, ($t$ en s).

Les figures 7.2 et 7.3 montrent la phase de la réponse fréquence fréquentielle en fonction de la fréquence. Pour la figure 7.2 il s'agit d'un filtre à phase linéaire tandis que pour la figure 7.3, le filtre n'est pas à phase linéaire.

L'objectif de cette section est d'énoncer que le fait qu'un filtre soit à phase linéaire dépend en fait d'une caractéristique de la réponse impulsionnelle. Un filtre est à phase linéaire lorsque sa réponse impulsionnelle est symétrique ou anti-symétrique par rapport à un instant donné.

On dit qu'un signal $s(t)$ est symétrique par rapport à l'instant $t = t_0$, si la courbe représentative de $s(t)$ par rapport à t admet un axe de symétrie en $t = t_0$. La symétrie de $s(t)$ par rapport à $t = t_0$ peut aussi être définie de la façon suivante :

$$\forall t, s(t) = s(2t_0 - t)$$

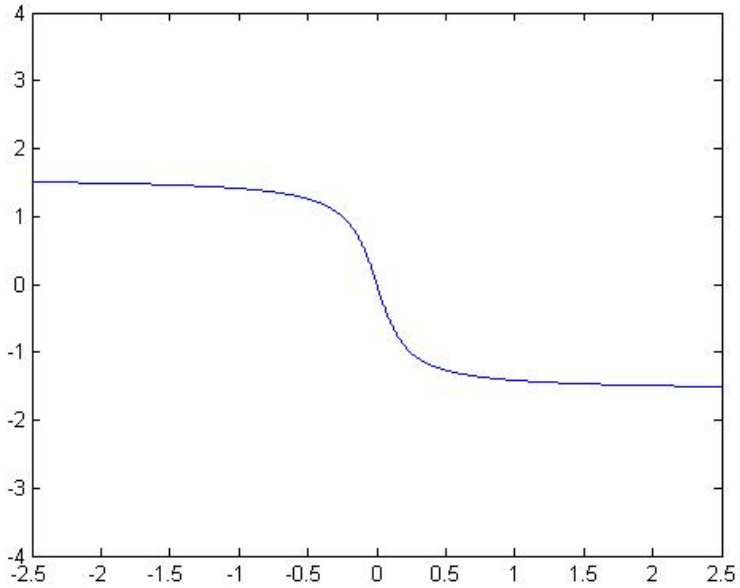


Figure 7.3: Représentation graphique de la phase de la réponse fréquentielle (rad) en fonction de la fréquence (Hz) du filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = e{-}t\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$, ($t$ en s).

On dit qu'un signal $s(t)$ est anti-symétrique par rapport à l'instant $t = t_0$, si la courbe représentative de $s(t)$ par rapport à t admet un point de symétrie centrale en $t = t_0$ et 0. La symétrie de $s(t)$ par rapport à $t = t_0$ peut aussi être définie de la façon suivante :

$$\forall t, s(t) = -s(2t_0 - t)$$

Les figures 7.4 et 7.5 représentent les réponses impulsionnelles en fonction du temps des filtres représentés sur les figures 7.2 et 7.3. Sur la figure 7.4, on observe que la réponse impulsionnelle est bien symétrique et il est donc normal que sur la figure 7.2, le filtre soit à phase linéaire. En revanche la réponse impulsionnelle montrée sur la figure 7.3 n'est pas symétrique et il est donc normal que le filtre représenté sur la figure 7.3 ne soit pas à phase linéaire.

7.6 Filtres analogiques à phase minimale

Un filtre à minimum de phase a tous ces zéros à l'intérieur du demi-plan $\{p|\Re(p) < 0\}$. Une des propriétés des filtres à minimum de phase est qu'ils ont un filtre inverse stables. Pour un filtre quelconque stable et causal $\mathcal{H}$, il existe un filtre à minimum de phase $\mathcal{H}_m$ dont le module de la fonction de transfert $|H_m(p)|$ est identique au module de la première fonction de tranfert $|H(p)|$. Trouver un tel filtre à minimum de phase, c'est faire une décomposition d'un filtre en une association d'un filtre à minimum de phase $|H_m(p)|$ et d'un filtre passe-tout $\frac{H(p)}{H_m(p)}$. On trouve ce filtre à minimum de phase en remplaçant les zéros de $\mathcal{H}$ qui se trouveraient dans le mauvais demi-plan $\{p|\Re(p) > 0\}$ par des zéros dont on a changé le signe de la partie réelle et après multiplication par une constante appropriée.

Pour illustrer le propos, on peut remarquer que parmi ces deux filtres définies par leur fonction de transfert, le premier est à phase minimale, tandis que le second ne l'est pas.

$$H_1(p) = \frac{p+2}{p+1} \quad H_2(p) = \frac{p-2}{p+1}$$

Pourtant ces deux filtres ont mêmes module de réponses fréquentielles

$$|\widehat{H}_1(f)| = |\widehat{H}_2(f)| = \sqrt{\frac{4\pi^2 f^2 + 4}{4\pi^2 f^2 + 1}}$$

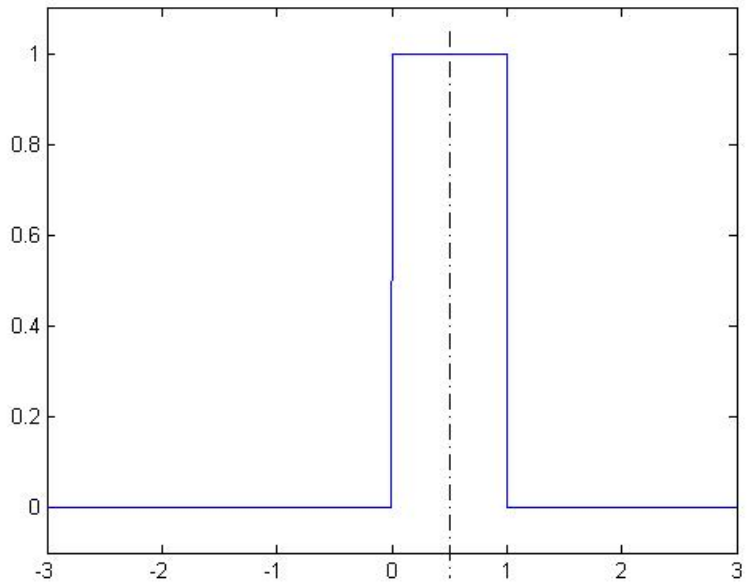


Figure 7.4: Représentation graphique de la réponse impulsionnelle $h(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ en fonction du temps (s) qui est symétrique par rapport à $t = 1/2$.

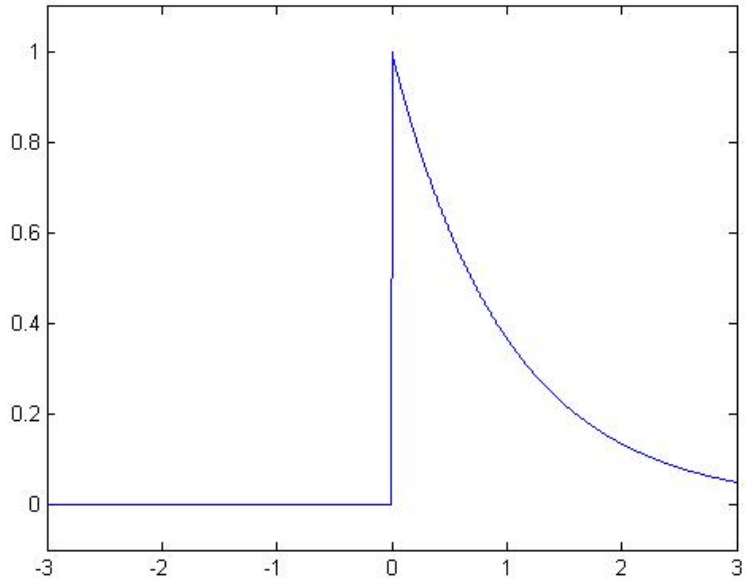


Figure 7.5: Représentation graphique de la réponse impulsionnelle $h(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ en fonction du temps (s) qui n'est pas symétrique.

Chapter 8

Descripteurs de signaux et de filtres : cours 2F

L'objectif de ce chapitre est de présenter la transformée en Z qui est très similaire à la transformée de Laplace, à ceci près qu'elle s'applique aux signaux à temps discret et est utilisée pour les filtres numériques. Tout comme la transformée de Laplace, elle ne permet pas de prendre en compte le passé lointain d'un signal (en particulier on ne pas l'appliquer à des signaux périodiques), mais cette limitation permet une plus grande liberté dans l'utilisation de cet outil et une simplification des calculs.

8.1 Transformée en Z

La transformée en Z s'applique à des signaux temps discret x_n causaux. De tels signaux sont définis par

$$n < 0 \quad \Rightarrow \quad x_n = 0 \tag{8.1}$$

Il s'agit de signaux qui sont nuls pour tous les instants précédent l'instant nul. La partie à gauche de l'axe des ordonnées de la courbe représentative de tels signaux est sur l'axe des abscisses.

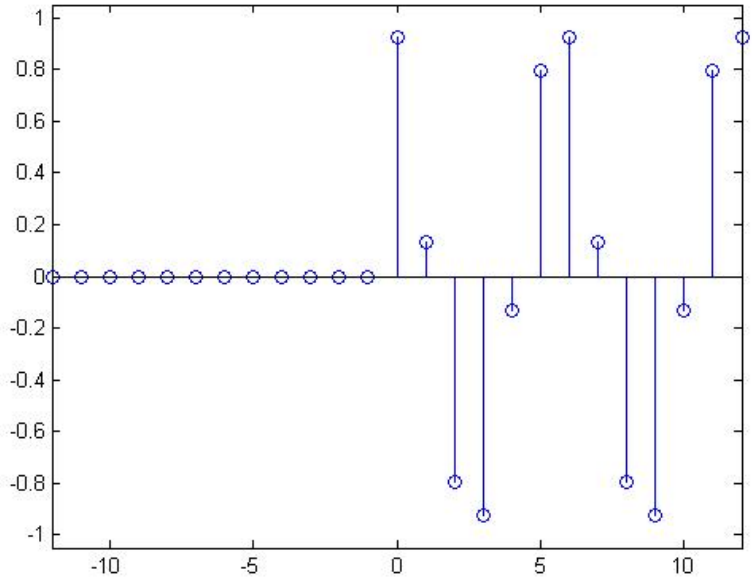


Figure 8.1: Représentation graphique d'un signal temps discret et causal.

La figure 8.1 montre un signal temps discret causal.

La transformée en Z est une transformation qui s'applique à un signal temps discret causal x_n et qui produit une fonction de variable complexe z définie seulement pour les complexes dont le module est strictement supérieur à 1.

$$S(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n z^{-n} \tag{8.2}$$

On peut observer que la borne inférieure de la somme est 0 et non $-\infty$ précisément parce que x_n est un signal causal.

Le fait de se limiter aux complexes de module strictement supérieur à 1 fait que la série converge pratiquement quelle que soit le signal x_n considéré parce que $|z^{-n}|$ est majorée par $|z|^{-n}$ qui est une fonction qui décroît vers zéro exponentiellement. Techniquement il suffit que la suite x_n soit majorée en valeure absolue par une fonction polynomiale en n pour que l'intégrale soit définie et prenne une valeure finie.

Pour définir la transformée inverse, il faudrait étendre la notion d'intégrale par rapport à une variable réelle à une notion plus générale d'intégrale définie sur le plan complexe. Cette notion existe, mais dans le cadre de ce cours, nous n'aurons pas besoin de cette notion. Nous utiliserons seulement le fait qu'il n'y a aucune différence entre deux signaux causaux ayant la même transformée en Z. Ainsi pour calculer la transformée en Z inverse, il suffit de deviner quel est le signal causal dont la transformée en Z donne le résultat souhaité. L'utilisation des propriétés de la transformée en Z permet en général de trouver le signal causal.

La transformée en Z présente de nombreuses similarités avec la transformée de Fourier. On considère un signal temps discret x_n pour lequel à la fois la tranformée de Fourier et la transformée en Z sont définis, x_n est à la fois temps discret causal (et non-périodique) et on note $X(z)$ sa transformée en Z et $\widehat{X}(f)$ sa transformée de Fourier à temps discret. On suppose que $X(z)$ est encore définie sur le cercle unité (ce qui suppose par exemple que le signal x_n n'ait pas le comportement d'une sinusoïde quand n tend vers l'infini).

$$\widehat{X}(f) = X(e^{j2\pi f T_e}) \tag{8.3}$$

où T_e est la période d'échantillonnage du signal x_n. Ceci signifie que la transformée d'un signal peut se lire en prolongeant (si tant est que cela est possible) la transformée en Z sur le cercle unité.

Nous verrons dans la partie suivante que les propriétés de la transformée en Z sont très similaires à la transformée de Fourier.

8.2 Propriétés de la transformée en Z

La notion de parité est relativement similaire, à ceci près qu'on ne peut bien sûr plus considérer les signaux symétriques par rapport à $n = 0$, de tels signaux ne sont pas causaux. On considère un signal x_n un signal causal et à valeurs réelles et $X(z)$ sa transformée en Z.

$$X(\bar{z}) = \bar{X}(z) \tag{8.4}$$

En particulier si $X(z)$ est un polynôme de variable z^{-1} ou une fraction rationnelle de variable z^{-1}, les coefficients utilisés sont nécessairement à valeurs réelles.

En $z = 1$, on a la relation suivante :

$$X(1) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$$

Comme toutes les autres transformées vues en cours, la transformée en Z est aussi linéaire. On considère un signal x_n temps discret et causal et $x'_n = a x_n$. On note $X(z)$ et $X'(z)$ les deux transformées en Z.

$$X'(z) = aX(z) \tag{8.5}$$

On considère deux signaux x_n et y_n temps discret et causaux et $z_n = x_n + y_n$. On note $X(z)$, $Y(z)$ et $Z(z)$ les transformées en Z de x_n, y_n et z_n.

$$Z(z) = X(z) + Y(z) \tag{8.6}$$

La transformée en Z ne peut pas transformer une intégration ou une dérivation en un produit ou une division, mais il existe deux propriétés relativement similaires.

On considère un signal x_n temps discret et causal qui en l'infini tend vers zéro ($\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$). On définit $y_n = \sum_{m=0}^{n} x_m$ Les deux transformées en Z vérifient la relation suivante :

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - z^{-1}} \tag{8.7}$$

On considère x_n un signal temps discret causal. On définit $y_n = x_n - x_{n-1}$. Les deux transformées en Z vérifient la relation suivante :

$$Y(z) = (1 - z^{-1})X(z) \tag{8.8}$$

La transformée en Z transforme un produit de convolution (entre signaux temps discrets causaux) en un produit de transformée en Z. On considère deux signaux temps discret et causaux x_n et y_n. Etant causaux, leur produit de convolution s'écrit

$$z_n = \sum_{p=0}^{n} x_p y_{n-p} \tag{8.9}$$

Ce signal est aussi causal. La relation entre les transformées en Z $X(z)$, $Y(z)$ et $Z(z)$ de x_n, y_n et z_n s'écrit

$$Z(z) = X(z)Y(z) \tag{8.10}$$

Si on retarde un signal temps discret d'un certain nombre de pas de temps alors sa transformée en Z est transformée par l'équivalent d'un déphasage. On considère x_n un signal temps discret et causal et y_n un signal retardé de d pas de temps $y_n = x_{n-d}$ alors

$$\widehat{Y}(z) = z^{-d}X(z) \tag{8.11}$$

Lorsqu'on prolonge $X(z)$ et $Y(z)$ sur le cercle unité, on retrouve bien un déphasage : $X(z)$ et $Y(z)$ ont alors même module et ne diffèrent que par la phase.

La propriété relative à la modulation existe aussi pour les transformées en Z. On considère un signal temps discret et causal x_n et un signal modulé $y_n = e^{j2\pi f_0 n T_e} x_n$ alors la relation entre les deux transformées en Z est

$$Y(z) = X(e^{-j2\pi f_0 T_e} z) \tag{8.12}$$

Cette relation permet justement de retrouver l'idée que le spectre est alors décalé de f_0.

On considère maintenant quelques exemples de transformée en Z. Le premier est similaire à la transformée de Fourier à temps discre.

$$\mathbb{TL}[\delta_n] = 1 \tag{8.13}$$

Les trois suivants sont clairement différents de la transformée de Fourier à temps discret.

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{TZ}\left[\mathbf{1}_{\mathbb{N}}[n]\right](z) & = & \frac{1}{1-z^{-1}} \\
\mathbb{TZ}\left[\cos(2\pi f_0 n T_e)\mathbf{1}_{\mathbb{N}}[n]\right](z) & = & \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j2\pi f_0 T_e} z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j2\pi f_0 T_e} z^{-1}} \\
\mathbb{TZ}\left[\sin(2\pi f_0 n T_e)\mathbf{1}_{\mathbb{N}}[n]\right](z) & = & \frac{1}{2j}\frac{1}{1-e^{j2\pi f_0 T_e} z^{-1}} - \frac{1}{2j}\frac{1}{1-e^{-j2\pi f_0 T_e} z^{-1}}
\end{array}$$

Il est tentant de vouloir retrouver la transformée en Z à partir de la transformée de Fourier, cela peut être une mauvaise idée en particulier s'il s'agit d'un signal constant ou périodique et ce même si le signal a été rendu causal par l'intermédiaire d'une suite échelon $\mathbf{1}_{[0,+\infty[}[n]$.

8.3 Filtre numérique, causalité et fonction de transfert

On souhaite maintenant pouvoir appliquer cette transformation aux filtres numériques. Mais pour cela il faut que la réponse impulsionnelle des filtres considérés soient causale.

On définit un filtre causal comme étant un filtre dont la réponse impulsionnelle est causale.

$$\mathcal{H} \text{ est causal} \quad \Leftrightarrow \quad h_n \text{ est causal} \tag{8.14}$$

Il se trouve que la causalité peut être définie de manière équivalente par la propriété suivante. Un filtre est causal si une modification de l'entrée postérieure à un instant n_0 ne peut entraîner de conséquences sur la sortie pour $n < n_0$.

Les filtres utilisés pour modéliser des phénomènes qui s'écoulant dans le temps sont a priori causaux. En revanche lorsqu'on utilise les filtres pour modéliser des phénomènes qui sont distribués spatialement, c'est le cas pour les images numériques, les filtres considérés ne sont en général pas causaux et certaines précautions sont nécessaires.

Dans la pratique, il y a en général un temps de retard entre une variation de l'entrée et la conséquence sur la sortie d'un filtre. Les filtres qui présentent cette caractéristique sont dits strictement causaux. Leur réponse impulsionnelle est nulle en $n = 0$.

On appelle fonction de transfert la transformée en Z de la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique.

On dit que la fonction de transfert d'un filtre s'écrit sous la forme d'une fraction rationnelle s'il existe des coefficients $a_0...a_N$ et $b_0...b_M$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + ... + a_N z^{-N}} \tag{8.15}$$

De tels filtres sont parfois appelés filtres rationnels. En pratique les filtres que nous considérerons ont des fonctions de transfert qui s'écrivent sous la forme d'une fraction rationnelle.

De tels filtres peuvent aussi être modélisés par une équation aux différences

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + ... + a_N y_{n-N} = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + ... + b_M x_{n-M}$$

En effet le produit par z^{-1} s'interprête comme un retard d'un pas de temps. La réponse fréquentielle de tels filtres peut souvent (à condition que la fonction de transfert puisse être prolongée sur l'ensemble de le cercle unité) se mettre sous la forme

$$\widehat{H}(f) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j2\pi f T_e} + ... + b_M e^{-j2\pi f M T_e}}{a_0 + a_1 e^{-j2\pi f T_e} + ... + a_N e^{-j2\pi f N T_e}}$$

Parmi les filtres numériques causaux, on distingue plusieurs catégories. On appelle filtre MA (moving average, ou à moyenne mobile) ou filtre RIF, un filtre dont la Réponse Impulsionnelle est Finie (nombre fini de termes non-nuls). Les relations entrées-sorties peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$a_0 y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + ... + b_M x_{n-M}$$

On appelle filtre AR (autorégressif) un filtre dont la relation entrée-sortie est définie par

$$a_0 y_n = x_n - a_1 y_{n-1} - ... - a_N y_{n-N}$$

On appelle filtre ARMA (autorégressif et à moyenne mobile ou autorégressif) un filtre dont la relation entrée-sortie est définie par

$$a_0 y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + ... + b_M x_{n-M} - a_1 y_{n-1} - ... - a_P y_{n-P} \tag{8.16}$$

Les filtre AR et ARMA sont des filtres RII (filtres à réponses impulsionnelles infinies).

8.4 Critère de stabilité des filtres numériques

Pour qu'on puisse utiliser un filtre comme modélisation d'un phénomène physique il est souhaitable que ce filtre soit stable. En général on attend trois propriétés :

- $y_n \to 0$ quand $u_n \to 0$
- y_n est borné quand u_n est borné.
- $|y_n - z_n| \to 0$ quand $|u_n - v_n| \to 0$.

où u_n, v_n sont des entrées du filtre et y_n et z_n sont les sorties correspondantes. Il se trouve que pour les filtres que nous considérons ces trois propriétés sont équivalentes entre elles et c'est ce que nous appelerons la propriété de stabilité.

Nous considérons ici que des filtres rationnels, la stabilité est donc nécessairement déterminés par les valeurs prises par les coefficients qui définissent ces fractions rationnelles, mais donner une condition sur la valeur de ces coefficients seraient une tâche complexe. Au lieu de cela on définit la notion de zéro et de pôle.

On considère un filtre $\mathcal{H}$ de fonction de transfert $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. P est un polynôme appelé numérateur et Q est un polynôme appelé dénominateur. On appelle zéros de $\mathcal{H}$ les racines de P et on appelle pôles de $\mathcal{H}$ les racines de Q.

La stabilité d'un filtre est déterminé par le lieu des pôles de $\mathcal{H}$.

$\mathcal{H}$ est stable si tous les pôles sont à l'intérieur il n'y aucun pôle sur sur le cercle unité ou à l'extérieur. $\{z||z| \geq 1\}$.

On peut aussi dire que $\mathcal{H}$ de fonction de transfert $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ est stable si

$$\forall z \text{ tel que } |z| \geq 1 \text{ on a } Q(z) \neq 0 \tag{8.17}$$

On peut utiliser de la même façon la décomposition en élément simple pour trouver la réponse impulsionnelle à partir de la fonction de transfert. Voici les étapes à effectuer.

1. Trouver les racines de Q avec leur ordre de multiplicité.
2. Écrire la relation (7.21).
3. Calculer les valeurs des coefficients a_i^j.
4. Trouver des signaux causaux dont les transformées en Z coïncident avec les éléments de la décomposition.
   - Si on a un pôle d'ordre 1, on constate que
   $$\mathbb{TZ}\left[z_0^n \mathbf{1}_{\mathbb{N}}[n]\right] = \frac{1}{1 - z_0 z^{-1}}$$
   - Si on a un pôle d'ordre ν avec $\nu > 1$, il est possible de procéder de la même façon que pour les filtres analogiques
   $$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1 - z_0 z^{-1}}\right] = \frac{d}{dz}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} z_0^n z^{-n}\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} z_0^n \frac{d}{dz}\left[z^{-n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}(-n) z_0^n z^{-n}$$
   et ainsi de suite en répétant la dérivation ν fois.
   - Si on a un pôle d'ordre ν avec $\nu > 1$, il est probablement plus simple de procéder en admettant tout simplement que pour un polynôme P de degré $\nu - 1$, il existe un polynôme P' de degré $\nu - 1$ tel que
   $$\frac{P(z^{-1})}{(1 - z_0 z^{-1})^{\nu}} = \mathbb{TZ}\left[P'(n) z_0^n \mathbf{1}_{\mathbb{N}}[n]\right] \tag{8.18}$$
   On peut ensuite trouver ce polynôme P' par identification avec la relation entrée-sortie (8.16) déduite l'écriture en fraction rationnelle de la fonction de transfert. L'annexe C.2, p. 81 donne un exemple de ce genre de calcul.
5. En déduire la réponse impulsionnelle.

Si on utilise les formules propres à la décomposition en élément simple, il faut se souvenir qu'elles ne sont valables que si on utilise des polynômes de variable z et non z^{-1} ce qui pourtant est parfois tentant.

8.5 Filtres numériques à phase linéaire

Un filtre est dit à phase linéaire si courbe représentative de la phase de la réponse fréquentielle en fonction de la fréquence est constituée d'une succession de droite de mêmes pentes. Il est rare que cette courbe soit une droite parce que la phase est en fait un angle souvent représenté entre $-\pi$ et π et qu'il a en général un saut quand l'une de ces

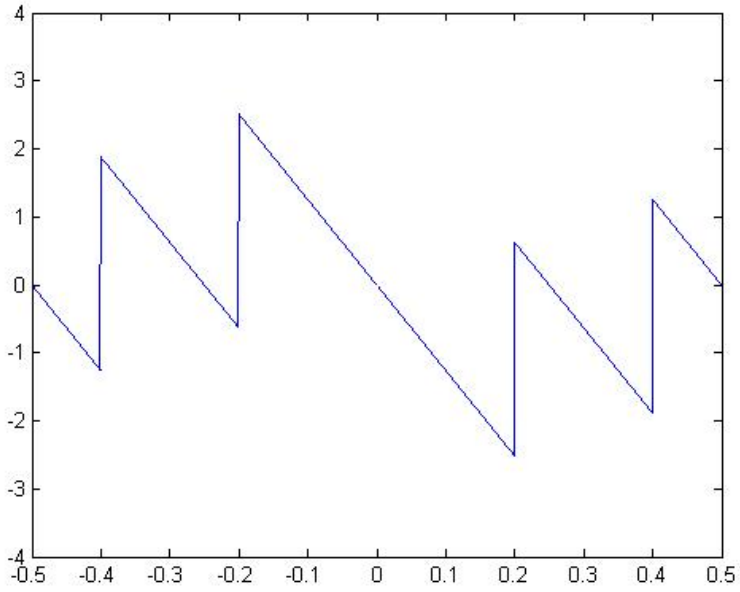


Figure 8.2: Représentation graphique de la phase de la réponse fréquentielle (rad) en fonction de la fréquence (Hz) du filtre de réponse impulsionnelle $h_n = \delta_n + \delta_{n-1} + \delta_{n-2} + \delta_{n-3} + \delta_{n-4}$, ($n$ en s).

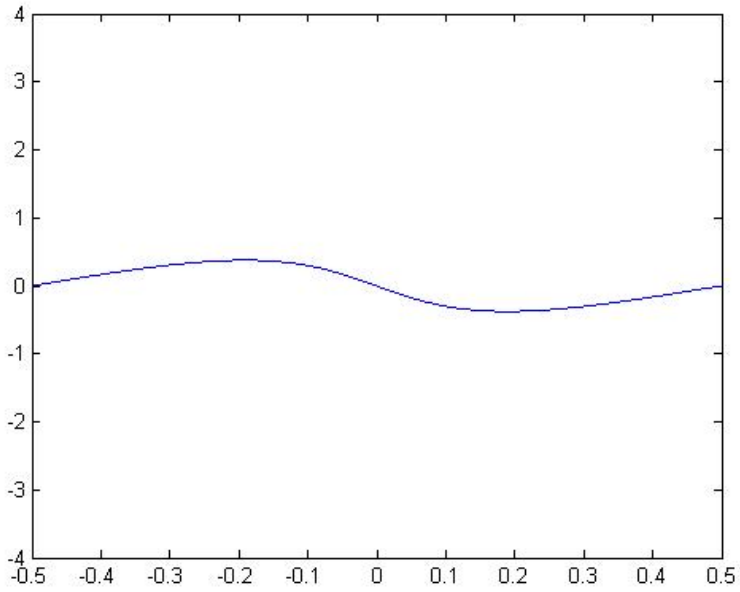


Figure 8.3: Représentation graphique de la phase de la réponse fréquentielle (rad) en fonction de la fréquence (Hz) du filtre de réponse impulsionnelle $h_n = e^{-n}\mathbf{1}_{\mathbb{N}}[n]$, ($n$ en s).

deux extrémités est atteinte. On peut aussi dire qu'un filtre est à phase linéaire si en dehors d'un certain nombre de fréquences particulières, la dérivée de la phase est une constante.

$$\frac{d \arg \widehat{S}(f)}{df} = C^{\text{te}}$$

La figure 8.2 et 8.3 montrent la phase de la réponse fréquence fréquentielle en fonction de la fréquence. Pour la figure 8.2 il s'agit d'un filtre à phase linéaire tandis que pour la figure 8.3, le filtre n'est pas à phase linéaire.

L'objectif de cette section est d'énoncer que le fait qu'un filtre soit à phase linéaire dépend en fait d'une caractéristique de la réponse impulsionnelle. Un filtre est à phase linéaire lorsque sa réponse impulsionnelle est symétrique par rapport à un instant donné.

On dit qu'un signal $s(t)$ est symétrique par rapport à l'instant $t = \frac{n_0 T_e}{2}$, si la courbe représentative de s_n par rapport à n admet un axe de symétrie en $t = \frac{n_0 T_e}{2}$. La symétrie de s_n par rapport à $t = \frac{n_0 T_e}{2}$ peut aussi être définie de la façon suivante :

$$\forall t, s_n = s_{n_0 - n}$$

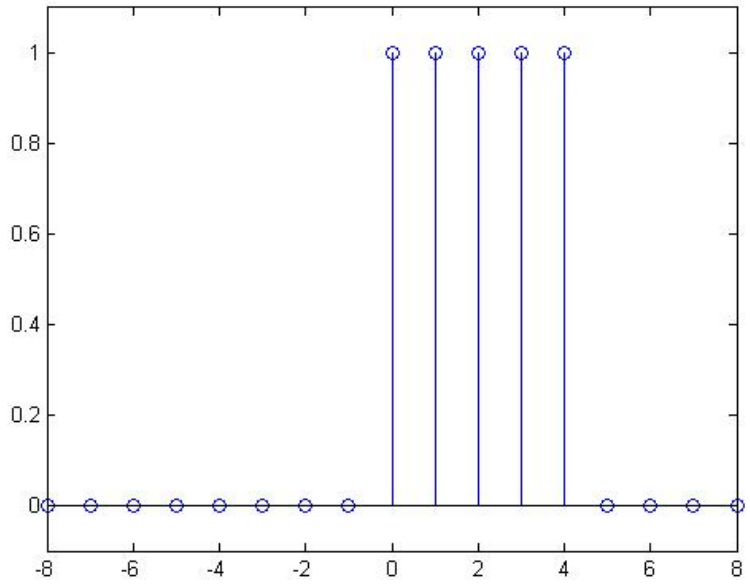


Figure 8.4: Représentation graphique de la réponse impulsionnelle $h_n = \delta_n + \delta_{n-1} + \delta_{n-2} + \delta_{n-3} + \delta_{n-4}$ en fonction du temps (s) qui est symétrique par rapport à $t = 2$.

Les figures 8.4 et 8.5 représentent les réponses impulsionnelles en fonction du temps des filtres représentés sur les figures 8.2 et 8.3. Sur la figure 8.4, on observe que la réponse impulsionnelle est bien symétrique et il est donc normal que sur la figure 8.2, le filtre soit à phase linéaire. En revanche la réponse impulsionnelle montrée sur la figure 8.3 n'est pas symétrique et il est donc normal que le filtre représenté sur la figure 8.3 ne soit pas à phase linéaire.

8.6 Filtres numériques à phase minimale

Un filtre à minimum de phase a tous ces zéros à l'intérieur du disque unité $\{z||z| < 1\}$. Une des propriétés des filtres à minimum de phase est qu'ils ont un filtre inverse stables. Pour un filtre quelconque stable et causal $\mathcal{H}$, il existe un filtre à minimum de phase $\mathcal{H}_m$ dont le module de la fonction de transfert $|H_m(z)|$ est identique au module de la première fonction de tranfert $|H(z)|$. Trouver un tel filtre à minimum de phase, c'est faire une décomposition d'un filtre en une association d'un filtre à minimum de phase $|H_m(z)|$ et d'un filtre passe-tout $\frac{H(z)}{H_m(z)}$. On trouve ce filtre à minimum de phase en remplaçant les zéros de $\mathcal{H}$ qui se trouveraient hors du disque unité, dans $\{z||z| < 1\}$ par des zéros dont on a inversé le module sans changer l'argument et après une multiplication par une constante appropriée.

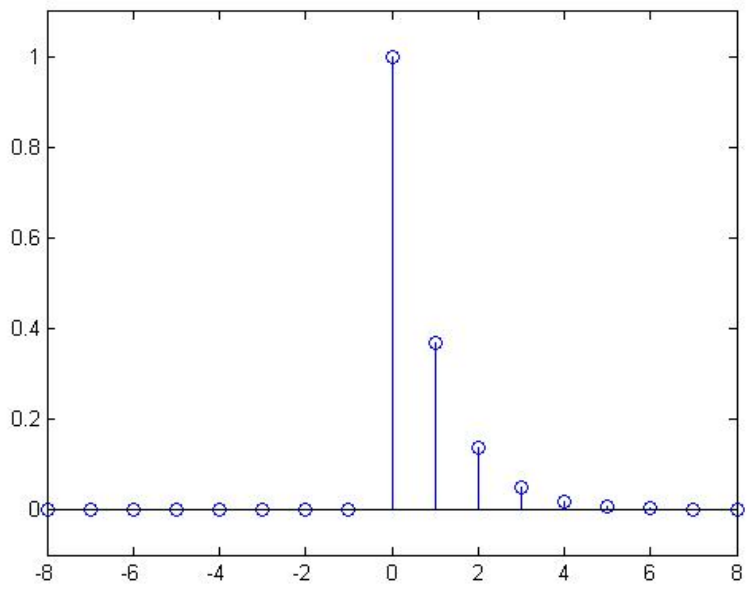


Figure 8.5: Représentation graphique de la réponse impulsionnelle $h_n = e^{-n}\mathbf{1}_{\mathbb{N}}[n]$ en fonction du temps (s) qui n'est pas symétrique.

Pour illustrer le propos, on peut remarquer à propos des deux filtres suivants définis par leur fonction de transfert, le premier n'est pas à phase minimale tandis que le second est à phase minimale.

$$H_1(z) = \frac{1+4z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad H_2(z) = 4\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Pourtant ces deux filtres ont mêmes module de réponse fréquentielle

$$|\widehat{H}_1(f)| = |\widehat{H}_2(f)| = \sqrt{\frac{17+8\cos(2\pi f T_e)}{\frac{5}{4}-\cos(2\pi f T_e)}}$$

Pour les deux filtres, le calcul se fait en remplaçant z par $e^{j2\pi f T_e}$ puis en séparant au numérateur et au dénominateur la partie réelle et la partie imaginaire, puis en évaluant le module au carré séparément au numérateur et au dénominateur et enfin en remarquant que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ pour θ quelconque.

Pour le premier filtre, le calcul intermédiaire est

$$|\widehat{H}_1(f)|^2 = \left|\frac{1+4e^{-j2\pi f T_e}}{1-\frac{1}{2}e^{j2\pi f T_e}}\right|^2 = \frac{(1+4\cos 2\pi f T_e)^2 + (4\sin 2\pi f T_e)^2}{(1-\frac{1}{2}\cos 2\pi f T_e)^2 + (\frac{1}{2}\sin 2\pi f T_e)^2}$$

Pour le deuxième filtre, le calcul intermédiaire est

$$|\widehat{H}_2(f)|^2 = 16\left|\frac{1+\frac{1}{4}e^{-j2\pi f T_e}}{1-\frac{1}{2}e^{j2\pi f T_e}}\right|^2 = 16\frac{(1+\frac{1}{4}\cos 2\pi f T_e)^2 + (\frac{1}{4}\sin 2\pi f T_e)^2}{(1-\frac{1}{2}\cos 2\pi f T_e)^2 + (\frac{1}{2}\sin 2\pi f T_e)^2}$$

Chapter 9

Synthèse de filtres numériques à réponse impulsionnelle finie : Cours G

L'objectif dans ce chapitre et dans celui qui suit n'est plus de déterminer les propriétés d'un filtre à partir de ses caractéristiques données par sa réponse impulsionnelle, son équation entrée-sortie, sa fonction de transfert ou sa réponse fréquentielle. Il s'agit au contraire de choisir les caractéristiques du filtre de façon à ce qu'il réponde à des caractéristiques souhaitées. Il existe un très grand nombre de méthodes, nous en verrons deux, l'une dans ce chapitre permettant de faire la synthèse d'un filtre numérique à réponse impulsionnelle finie (MA), et l'autre dans le chapitre qui suit permettant de faire la synthèse d'un filtre numérique à réponse impulsionnelle infinie (ARMA).

Il existe des techniques très similaires permettant de synthétiser un filtre analogique, mais dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons à la synthèse des filtres numériques.

La première partie du chapitre définit la notion de filtres idéaux qui nous servent ici à définir l'objectif à atteindre. La deuxième partie expose une méthodologie permettant de faire la synthèse de ce filtre. La troisième partie propose d'utiliser des fenêtres pour améliorer la synthèse du filtre. La quatrième partie présente une technique permettant de définir un filtre numérique à partir des caractéristiques d'un filtre analogique. La cinquième partie décrit une application utilisant la synthèse de filtre : le débruitage d'un signal.

9.1 Filtres idéaux

Dans un certain nombre d'application, on définit ce que l'on recherche comme filtre optimal en indiquant les fréquences pour lesquelles on ne souhaite aucune déformation du signal, les fréquences pour lesquelles on souhaite supprimer tout le signal et éventuellement les fréquences pour lesquelles la façon dont le signal est transformé n'est pas prise en compte dans l'objectif. Comme on sait que l'application d'un filtre sur un signal revient à multiplier la réponse fréquentielle du filtre par la transformée de Fourier du signal, cette façon de formuler l'objectif de synthèse d'un filtre revient à chercher à approcher un filtre idéal. Par filtre idéal, on entend ici un filtre dont le module de la réponse fréquentielle vaut soit 1 soit 0 en fonction de la valeur de la fréquence.

On distingue 5 types de filtres analogiques idéaux. On peut les définir par leur spectre ou par la façon dont il transforme un signal d'entrée $u(t)$ de transformée de Fourier $\widehat{U}(f)$, en un signal de sortie $v(t)$ de transformée de Fourier $\widehat{V}(f)$.

- Un filtre passe-bas idéal est un filtre qui laisse inchangé le spectre de l'entrée $|\widehat{U}(f)|$ pour toutes les fréquences inférieures à une fréquence de coupure et qui annule le spectre de l'entrée pour toutes les fréquences inférieures à la fréquence de coupure. On peut le définir ainsi

  $$|\widehat{H}(f)| = \mathbf{1}_{[-f_c,f_c]}(f)$$

  La courbe en haut de la figure 9.1 est un exemple de réponse fréquentielle de filtre passe-bas de fréquence de coupure à 1Hz.

- Un filtre passe-haut idéal est un filtre qui laisse inchangé le spectre de l'entrée pour toutes les fréquences supérieures à une fréquence de coupure et qui annule le spectre pour toutes les fréquences inférieures à la fréquence de coupure. On peut le définir ainsi :

  $$|\widehat{H}(f)| = \mathbf{1}_{]-\infty,-f_c]\bigcup[f_c,+\infty[}(f)$$

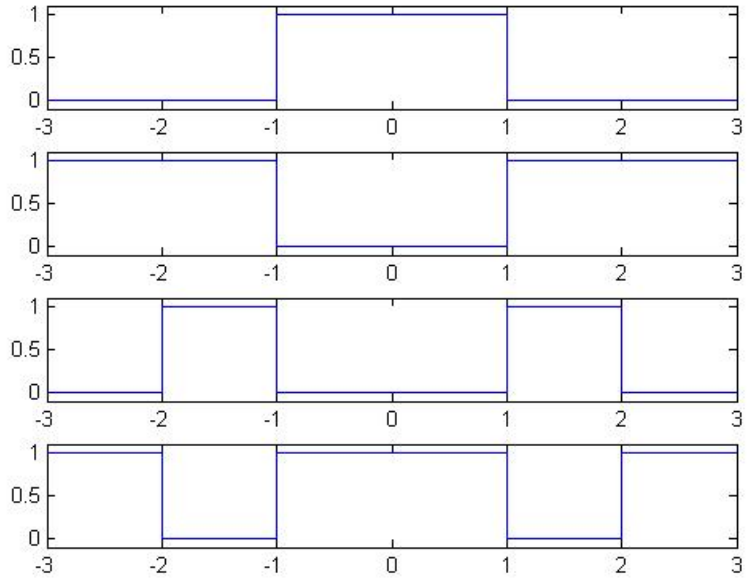


Figure 9.1: Représentation graphique de 4 réponses fréquentielles de filtres analogiques idéaux (passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande). L'axe horizontal correspond aux fréquences.

La deuxième courbe de la figure 9.1 est un exemple de réponse fréquentielle de filtre passe-haut de fréquence de coupure à 1Hz.

- Un filtre passe-bande idéal suppose à priori deux fréquences de coupures f_{c1} et f_{c2}. Il s'agit d'un filtre qui laisse inchangé le spectre sur toutes les fréquences qui se situent entre f_{c1} et f_{c2}. Ce filtre annule le spectre sur toutes les autres fréquences. On peut le définir ainsi :

$$|\widehat{H}(f)| = \mathbf{1}_{[-f_{c2},-f_{c1}]\bigcup[f_{c1},f_{c2}]}(f)$$

La troisième courbe de la figure 9.1 est un exemple de réponse fréquentielle de filtre passe-bande de fréquences de coupure à 1Hz et 2Hz.

- Un filtre coupe-bande idéal suppose aussi qu'on choisisse deux fréquences de coupures f_{c1} et f_{c2}. Il s'agit d'un filtre qui laisse inchangé le spectre sur toutes les fréquences qui se situent en dehors de l'intervalle $[f_{c1}, f_{c2}]$. Ce filtre annule le spectre sur toutes les fréquences situées entre la première et la seconde fréquence de coupurre. On peut le définir ainsi :

$$|\widehat{H}(f)| = \mathbf{1}_{]-\infty-f_{c2}]\bigcup[-f_{c1},f_{c1}]\bigcup[f_{c2},+\infty[}(f)$$

La quatrième courbe de la figure 9.1 est un exemple de réponse fréquentielle de filtre coupe-bande de fréquences de coupure à 1Hz et 2Hz.

- Un filtre passe-tout laisse inchangé le spectre de l'entrée mais peut modifier sa phase. Il peut être défini par

$$|\widehat{H}(f)| = 1$$

On utilise aussi cette classification pour les filtres numériques idéaux. Les termes sont identiques, mais leur signification est légèrement modifiée puisque la réponse fréquentielle d'un filtre numérique est périodique de période f_e où f_e est la fréquence d'échantillonnage. La modification consiste seulement à ce que la caractérisation définie plus haut est valable sur l'intervalle $[-f_e/2, f_e/2]$.

Les courbes de la figure 9.2 correspondent aux réponses fréquentielles des filtres numériques idéaux pour une fréquence d'échantillonnage $f_e = 6$Hz. La courbe du haut correspond à un passe-bas. La deuxième courbe correspond à un passe-haut, la troisième courbe correspond à un passe-bande, la quatrième courbe correspond à un coupe-bande.

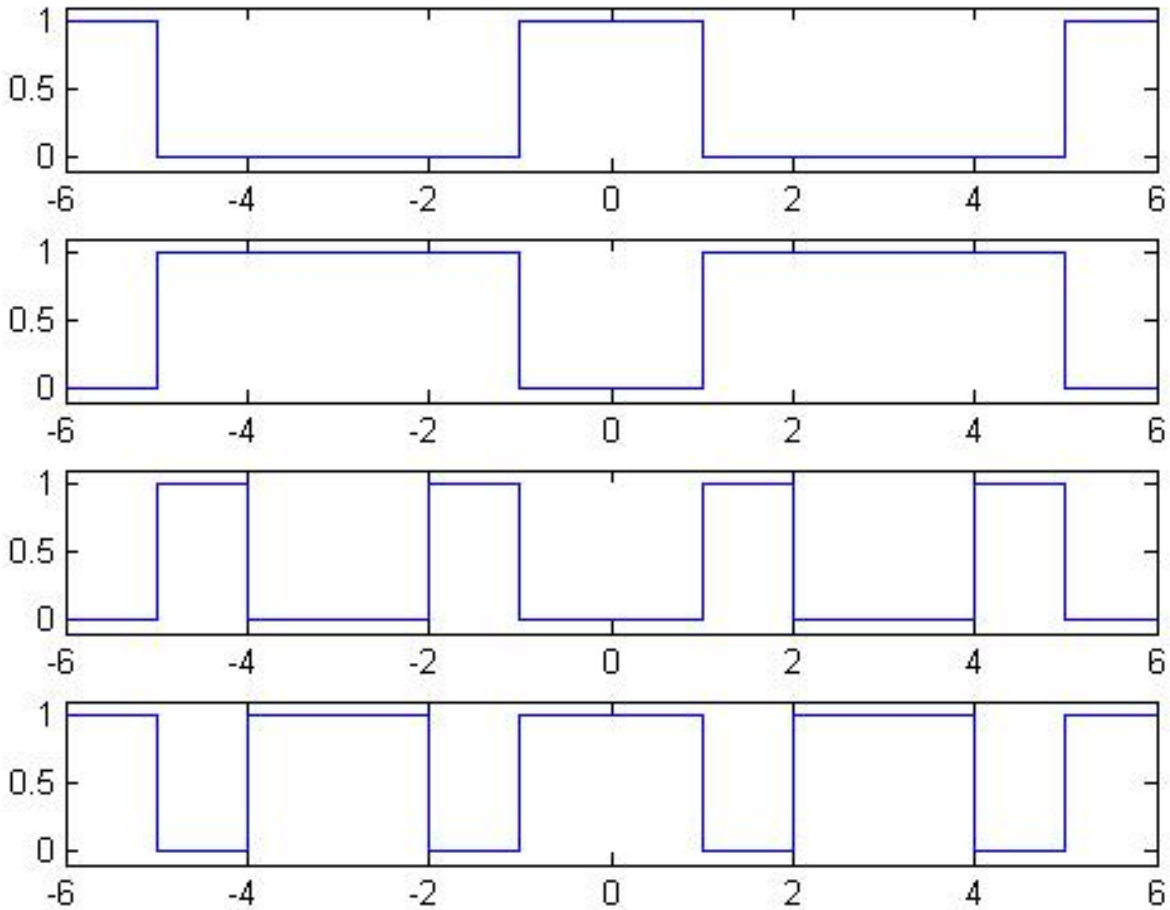


Figure 9.2: Représentation graphique de 4 réponses fréquentielles de filtres numériques idéaux (passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande). L'axe horizontal correspond aux fréquences.

9.2 Synthèse d'un filtre numérique

Il n'existe pas de filtre numérique de taille finie qui ait une réponse fréquentielle égale à ces filtres idéaux. L'objectif de la synthèse de filtre consiste à trouver un filtre MA causal qui s'approche le plus possible du filtre idéal recherché. On souhaite aussi que la réponse impulsionnelle de ce filtre ne soit pas trop longue et que par exemple seuls les termes associés aux instants entre $t = 0$ et $t = (N-1)T_e$ soient non-nuls.

La méthodologie à suivre pour synthétiser un filtre numérique, consiste à choisir un filtre idéal noté $\mathcal{H}_i$ (type et fréquence de coupure) et à suivre les étapes suivantes.

1. On calcule de la transformée de Fourier temps discret inverse de la réponse fréquentielle du filtre idéal, $\widehat{H}_i(f)$ de façon à obtenir une réponse impulsionnelle notée

$$h_n^a \;=\; \mathbb{TFTD}^{-1}\left[\widehat{H}_i(f)\right]$$

2. Troncature de la réponse impulsionnelle

$$h_n^b = h_n^a \mathbf{1}_{\{-N..N\}}[n]$$

3. Application d'un retard sur la réponse impulsionnelle de façon à décaler les indices et à rendre causal le filtre ainsi synthétisé.

$$h_n^c = h_{n-N}^b$$

Pour synthétiser un filtre passe-haut, on peut appliquer la méthodologie présentée en considérant comme filtre idéal un filtre passe-haut, soit appliquer la méthodologie précédente avec un filtre idéal passe-bas de même fréquence de coupure et intercaler une étape supplémentaire entre la deuxième et la troisième étape : $h_n^{bBis} = \delta_n - h_n^b$ En effet une telle transformation sur la réponse impulsionnelle permet de transformer un passe-bas en un passe-haut ($\widehat{H}^{bBis}(f) = 1 - \widehat{H}^b(f)$).

9.3 Utilisation des fenêtres

La deuxième étape de troncature en modifiant la réponse impulsionnelle modifie aussi la réponse fréquentielle, l'éloigne du filtre idéal en y ajoutant des ondulations. C'est ce qu'illustre la figure 9.3 sur un exemple. La partie gauche de la figure représente les réponses impulsionnelles, la partie droite représente les réponses fréquentielles. La deuxième ligne correspond à l'application de la transformée de Fourier temps discret inverse à un filtre passe-bas idéal. La première ligne correspond à la transformée de Fourier inverse du filtre idéal analogique et nous fournit une réponse impulsionnelle temps continu dont la deuxième ligne est l'échantillonnage. La réponse fréquentielle de la deuxième ligne est périodique, ce qui est normal pour un filtre numérique, et cela peut aussi se voir comme la conséquence de cet échantillonnage. La troisième ligne consiste à transformer le filtre passe-bas en un filtre passe-haut par l'intermédiaire de la relation $h_n^{bBis} = \delta_n - h_n^b$. La quatrième ligne supprime les oscillations de la réponse impulsionnelle grace à une troncature de la réponse impulsionnelle, mais les introduit sur la réponse fréquentielle. La cinquième ligne est justement l'utilisation d'une fenêtre (en l'occurence d'une fenêtre triangulaire) qui aboutit à réduire les oscillations sur la réponse fréquentielle. Les traits en semi-pointillés (alternance de traits longs et courts) indiquent les fréquences $f_e/2$ et $-f_e/2$ qui sont des axes de symétrie du module d'une réponse fréquentielle.

Au delà de cet exemple particulier, la troncature d'un signal produit des ondulations sur la réponse fréquentielle. En effet la troncature peut se voir comme le fait de multiplier la réponse impulsionnelle par un signal porte $p[n] = \mathbf{1}_{\{-N/2...N/2\}}[n]$ dont la transformée de Fourier est un quotient de sinusoïdes :

$$\mathbb{TFTD}[p[n]](f) = \frac{\sin\left(\pi f(N+1)T_e\right)}{\sin\left(\pi f T_e\right)}$$

Cette fonction ressemble à basse fréquence à un sinus cardinal, mais diffère à plus haute fréquence puisque cette fontion est aussi périodique de période $f_e = 1/T_e$. Or le fait de faire une multiplication de signaux dans le domaine temporel est équivalent au produit de convolution dans le domaine fréquentiel. C'est donc en ce sens que la troncature produit des ondulations.

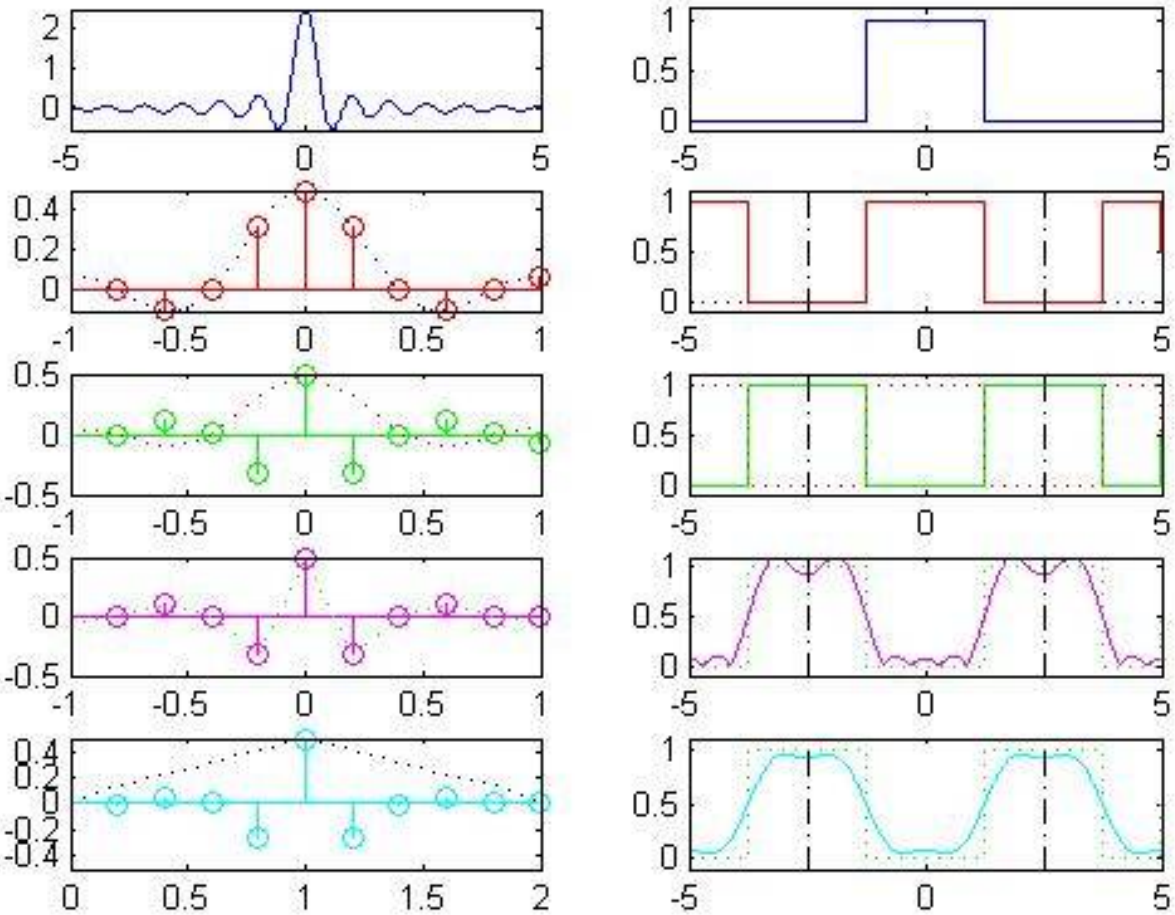


Figure 9.3: Réponses impulsionnelles et réponses fréquentielles ayant servies à la synthèse d'un filtre numérique passe-haut de fréquence de coupure à 1.5Hz pour une fréquence d'échantillonnage de $f_e = 5$Hz.

L'objectif d'une fenêtre à temps discret est de multiplier la réponse impulsionnelle par un signal tronqué et dont l'effet est de rapprocher la nouvelle réponse fréquentielle de celle obtenue avant la troncature. Plus formellement on peut définir l'objectif recherché, on notant x_n un signal quelconque et w_n le signal associé à la fenêtre qui doit être nul sauf pour les instants compris entre $t = -NT_e$ et $t = NT_e$. On cherche à avoir la meilleur approximation pour la relation suivante :

$$\mathbb{TFTD}\left[w_n x_n\right](f) \approx \mathbb{TFTD}\left[x_n\right](f)$$

Voici quelques exemples de fenêtres

1. Fenêtre rectangulaire

$$h_n = \mathbf{1}_{\{-N,N\}}[n]$$

2. Fenêtre triangulaire

$$h_n = \frac{N+1-|n|}{N+1}\mathbf{1}_{\{-N,N\}}[n]$$

3. Fenêtre de Hann

$$h_n = \left[0.5 - 0.5\cos(2\pi\frac{n+N}{2N+1})\right]\mathbf{1}_{\{-N,N\}}[n]$$

4. Fenêtre de Hamming

$$h_n = \left[0.54 - 0.46\cos(2\pi\frac{n+N}{2N+1})\right]\mathbf{1}_{\{-N,N\}}[n]$$

En pratique, l'utilisation d'une fenêtre se fait juste après la troncature de la réponse impulsionnelle et avant l'application d'un retard sur la réponse impulsionnelle. Elle consiste simplement à multiplier terme à terme la réponse impulsionnelle.

$$h_n^{bBis} = h_n^b\, w_n$$

L'utilisation d'une fenêtre ne peut malgré tout pas suppléer aux performances que l'on peut obtenir en utilisant un filtre numérique plus long. Il existe d'ailleurs une relation entre la longueur du filtre numérique synthétisé N, la raideur de la réponse fréquentielle du filtre synthétisé (ΔF désigne la largeur de bande de transition), les ondulations présentes sur la bande passante (δ_1) et la bande d'atténuation (δ_2). Formellement δ_1 et δ_2 sont des coefficients entre 0 et 1, il s'agit de la différence en valeur absolue entre la valeur réelle et la valeur du module de la réponse fréquentielle idéale divisé par le module de la réponse fréquentielle idéale sur la bande passante.

$$N = \frac{2}{3\Delta F}\ln\left(\frac{1}{10\delta_1\delta_2}\right)$$

De telles relations sont désignées sous le terme de relation temps-fréquence.

De telles relations permettent de faire un compromis à faire entre l'objectif d'atteindre le plus précisément le filtre idéal et le fait de ne pas d'obtenir un filtre dont la réponse impulsionnelle n'est pas trop longue. Ce compromis dépend de l'application visée.

On définit la notion de résolution fréquentielle. Un signal a une résolution ΔF s'il est possible de distinguer deux fréquences f et $f + \Delta F$.

9.4 Méthode de l'invariant impulsionnel

La méthode de l'invariant impulsionnel est un exemple de technique permettant de discrétiser un filtre. Ce que l'on appelle discrétiser un filtre, consiste à transformer un filtre analogique en un filtre numérique. L'objectif recherché est en général de faire en sorte que la relation entrée sortie du filtre numérique soit la plus proche de la relation entrée sortie du filtre analogique. Et comme le produit de convolution à temps discret est une opération un peu différente du produit de convolution à temps continu, l'objectif recherché est un peu différent de celui qui consiste à discrétiser un signal à temps continu.

La méthode de l'invariant impulsionnel consiste à définir un filtre numérique par sa réponse impulsionnelle est obtenue à partir de la discrétisation de la réponse impulsionnelle du filtre analogique

$$h_n^{\#} = T_e h(nT_e) \tag{9.1}$$

où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre analogique.

Ce n'est pas forcément une méthode simple si la réponse impulsionnelle du filtre analogique est difficile à calculer. Ce n'est pas a priori une méthode à utiliser si la réponse fréquentielle du filtre analogique ne respecte pas le critère de Nyquist. En effet la réponse fréquentielle du filtre numérique ainsi discrétisé est définie par

$$\widehat{H}(f) = \sum_k \widehat{H}(f - kf_e) \tag{9.2}$$

Cette méthode est utilisée par exemple pour définir un filtre moyenneur ou un filtre gaussien.

La remarque 1 (p. 12) est aussi valable ici. Lorsque la réponse impulsionnelle $h(t)$ présente une discontinuité, ce qui est assez fréquent en $t = 0$, il est important de modifier l'équation (9.1) qui devient alors

$$h_n^{\#} = \frac{T_e}{2} h(nT_e^-) + \frac{T_e}{2} h(nT_e^+) \tag{9.3}$$

où $h(nT_e^-)$ et $h(nT_e^+)$ désignent les limites à gauche et à droite de $t \mapsto h(t)$ en $t = nT_e$. Si on ne tient pas compte de cette remarque alors qu'il y a une discontinuité en $t = nT_e$ alors l'équation (9.1) n'est plus valable.

9.5 Application aux signaux aléatoires

9.5.1 Généralités

On distingue les signaux déterministes des signaux aléatoires (ou stochastiques). Les premiers prennent à chaque instant une valeur définie, tandis que les seconds prennent une plage de valeurs, à chacune de ces valeurs est affectée un coefficient appelé probabilité qui traduit la confiance que l'on a dans le fait que tel signal prennent effectivement telle valeur. Le fait de savoir appliquer des outils sur des signaux aléatoires est l'objet d'un autre cours, notamment du traitement du signal aléatoire. Cependant ces deux cours sont en réalité complémentaires. Le traitement du signal propose des outils qui sont définis sur des signaux déterministes, mais qui ont des propriétés stochastiques intéressantes lorsqu'on les applique à des signaux aléatoires.

L'autocorrélation d'un signal aléatoire à temps discret pourrait être définié comme pour un signal déterministe par $\gamma_B[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n B_{n-k}$ Mais le résultat devient une quantité aléatoire. Aussi pour un processus aléatoire ce qu'on appelle l'autocorrélation est l'espérance.

$$\gamma_B[k] = E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n B_{n-k}\right]$$

Il s'agit de faire une moyenne sur les différentes valeurs prises par $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_{n+k} B_n$ en les pondérant par la probabilité de ces valeurs. En pratique pour calculer cette quantité on utilise les propriétés des lois gaussiennes sans chercher à calculer la densité de probabilité de $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n B_{n-k}$. La puissance d'un signal aléatoire est définie par

$$P_B = E[B_n^2]$$

La densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire est la transformée de Fourier à temps discret de l'autocorrélation, l'espérance peut être calculée soit avant soit après avoir appliqué la transformée de Fourier à temps discret.

$$\Gamma_B(f) = \mathbb{TFTD}\left[\gamma_B[k]\right](f)$$

Elle peut aussi s'exprimer à partir du module au carré de la transformée de Fourier à temps discret, mais il faut aussi appliquer l'espérance

$$\Gamma_X(f) = E\left[\left|\mathbb{TFTD}\left[X_n\right](f)\right|^2\right]$$

Un exemple particulier de bruit aléatoire à temps discret est le bruit blanc à temps discret. Le signal à chaque instant est une variable aléatoire indépendante du signal à tous les autres instants. Il est de moyenne statistique nulle et a la même définition stochastique à chaque instant

$$E[B_k B_l] = \sigma^2 \delta_{k-l}$$

où $\delta_{k-l} = 0$ si $k \neq l$ et $\delta_0 = 1$. Son autocorrélation est

$$\gamma_B[k] = \sigma^2 \delta_k$$

Sa puissance est

$$P_B = \sigma^2$$

Une tel signal aléatoire une densité spectrale de puissance constante

$$\Gamma_B(f) = \sigma^2$$

On peut *écouter* un bruit blanc avec les instructions Matlab suivantes :

```
y=randn(1,10000);
sound(y)
```

La première instruction génère une réalisation d'un bruit blanc gaussien d'écart-type 1. La seconde envoie les valeurs ainsi tirées aléatoirement vers un haut-parleur (via une carte son). On peut alors entendre un sifflement.

Le bruit blanc joue un rôle important dans l'étude des signaux aléatoires. Considérons un signal aléatoire ayant des caractéristiques suffisamment régulières pour avoir une densité spectrale $\Gamma_Y(f) = |\widehat{H}(f)|^2$ où $\widehat{H}(f)$ est la réponse fréquentielle d'un filtre. Ce signal a alors la même autocorrélation que s'il avait été généré par un bruit blanc filtré par un filtre $\mathcal{H}$ de réponse fréquentielle $\widehat{H}(f)$.

L'application d'un filtre $Y_n = \mathcal{H}[X_n]$ de réponse fréquentielle $\widehat{H}(f)$ déforme la densité spectrale $\Gamma_X(f)$ d'un signal X_n en la densité spectrale $\Gamma_Y(f)$ d'un signal Y_n

$$\Gamma_Y(f) = |\widehat{H}(f)|^2 \Gamma_X(f)$$

9.5.2 Application au débruitage d'un signal

Pour expliquer la différence entre les résultats théoriques et les résultats pratiques lors d'une expérimentation, on dit qu'il y a une différence entre le signal observé et le signal réel (dit aussi signal source). La différence peut bien sûr provenir aussi d'une modélisation inexacte ou trop simplifié, mais une telle inexactitude est difficile à modéliser, alors cette différence là aussi est souvent modélisé comme une différence entre le signal réel et le signal observé. On appelle cela le bruit. Et l'hypothèse souvent utilisée est que la différence entre le vrai signal et le signal modélisé est un bruit blanc. Autrement dit le signal observé est la somme d'un signal déterministe (appelé signal source ou vrai signal) et d'un signal aléatoire (appelé bruit additif).

On mesure la proportion du bruit dans le signal en considérant la puissance P_S du signal déterministe et P_B la puissance du bruit. On mesure alors le rapport du signal sur bruit en décibel.

$$RSB_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{\sqrt{P_s}}{\sqrt{P_b}}\right)$$

Le rapport signal sur bruit est d'autant plus élevé qu'il y a moins de bruit. Ce rapport signal sur bruit augmente de 6dB quand on multiplie par deux le siganl réel sans changer le bruit. Il diminue de 20dB si on multiplie le bruit par 10 sans rien changer au signal source.

On appelle débruitage le fait d'appliquer un filtre à un signal bruité de façon à ce que la sortie de ce filtre appelé signal filtré soit plus proche du signal réel que le signal filtré, (le rapport signal sur bruit du signal filtré doit être plus élevé que le rapport signal sur bruit du signal non filtré). En théorie on peut débruiter au moins un petit peu un signal si pour certaines fréquences le bruit est plus important que le signal. Dans ce cas, a priori, le filtre idéal à utiliser est

$$\begin{aligned} \widehat{H}(f) = 1 \quad \text{si} \quad \Gamma_X(f) > \Gamma_B(f) \\ \widehat{H}(f) = 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

où $\Gamma_X(f)$ est la densité spectrale du signal réel et $\Gamma_B(f)$ est la densité spectrale du bruit.

Chapter 10

Synthèse de filtres à réponses impulsionnelles infinies : Cours H

L'objectif de ce chapitre est de présenter une technique pour synthétiser des filtres numériques ARMA, c'est-à-dire pour calculer les coefficients d'un filtre en fonction de ce qu'il s'agit d'un passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande ayant telles ou telles fréquences de coupures. La méthode proposée ici utilise les filtres de Butterworth parce qu'ils sont plus simples à calculer. Les autres méthodes, toutes en étant plus complexes présentent de nombreuses similitudes avec la méthode présentée ici.

10.1 Définition d'un filtre de Butterworth

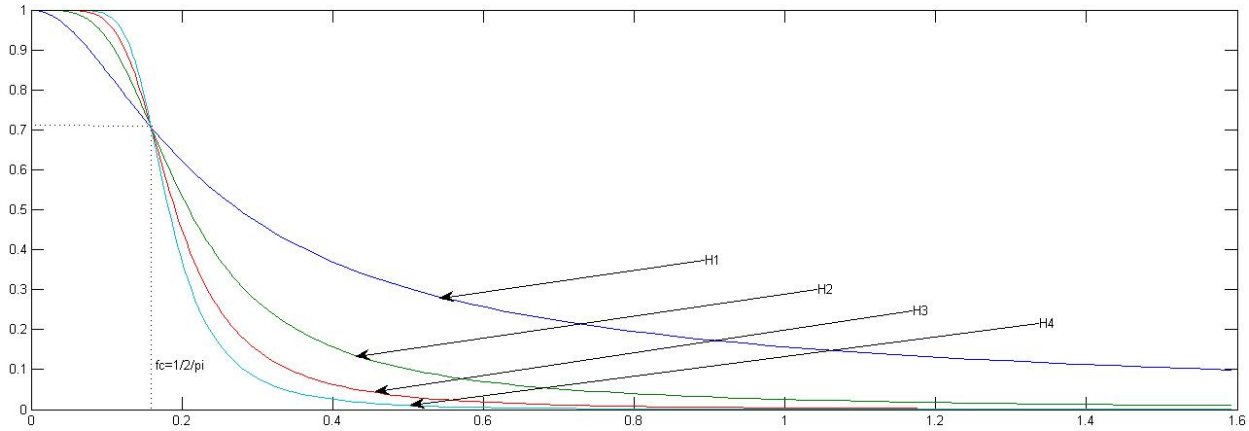


Figure 10.1: Représentation graphique du module des 4 réponses fréquentielles en fonction de la fréquence des 4 premiers filtres de Butterworth, H_1, H_2, H_3, H_4.

Les filtres de Butterworth sont une famille de filtre analogiques dont les réponses fréquentielles sont toutes des courbes décroissantes valant 1 en $f = 0$ et 0 en $f = +\infty$. Elles ont toutes la même fréquence de coupure $f_c = \frac{1}{2\pi}$ (l'écriture de ces réponses fréquentielles est plus simple lorsqu'elle est faite en fonction de la pulsation $\omega = 2\pi f$, la pulsation de coupure vérifie alors $\omega_c = 1$). Les différentes réponses fréquentielles diffèrent seulement par leur raideur qui augmente avec l'ordre de ces filtres. Les réponses fréquentielles de ces filtres sont représentées sur la figure 10.1.

Les filtres de Butterworth d'ordres 1 à 4 sont donnés par

$$H_1(p) = \frac{1}{p+1}$$

$$H_2(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$

$$H_3(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+p+1)}$$

$$H_4(p) = \frac{1}{(1+2\cos(\frac{3\pi}{8})p+p^2)(1+2\cos(\frac{\pi}{8})p+p^2)}$$

avec $\cos(\pi/8) \approx 0.92$ et $\cos(3\pi/8) = 0.38$.

Une définition plus générale de ces filtres de Butterworth s'appuie sur les polynômes suivants. Les polynômes de degré paires $N = 2P$ sont définis par

$$B_{2P}(p) = \prod_{k=1}^{P} \left(1 + 2\cos(\varphi_k)p + p^2\right)$$
$$\text{avec } \varphi_k = \frac{1-2k}{4P}\pi \text{ pour } k \in \{1..P\}$$

Les polynômes de degré impaires $N = 2P+1$ sont définis par

$$B_{2P+1}(p) = (p+1)\prod_{k=1}^{P} \left(1 + 2\cos(\varphi_k)p + p^2\right)$$
$$\text{avec } \varphi_k = \frac{-k}{2P+1}\pi \text{ pour } k \in \{1..P\}$$

Les filtres de Butterworth d'ordre N sont définis par

$$H(p) = \frac{1}{B_N(p)}$$

La réponse fréquentielle de ces filtres est donnée par

$$|\widehat{H}(f)|^2 = \frac{1}{((4\pi^2 f^2)^N + 1)}$$

Avec cette écriture on retrouve d'une part que leur fréquence de coupure commune est $f_c = \frac{1}{2\pi}$:

$$f = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow |\widehat{H}(f)| = \frac{\sqrt{2}}{2}\max(|\widehat{H}(f)|)$$

10.2 Synthèse d'un filtre analogique par un filtre de Butterworth

On souhaite maintenant utiliser les filtres de Butterworth pour définir un filtre analogique qui soit un passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande et qui ait les bonnes fréquences de coupures et une raideur suffisante.

La raideur est déterminé par l'ordre N, plus N est élevé plus le filtre obtenu est raide. Il existe des techniques permettant de calculer N en fonction d'objectifs à atteindre sur la courbe de la réponse fréquentielle à calculer. En fonction du type de filtre à synthétiser on considère différentes méthodologies.

Méthodologie 1 (Synthèse d'un filtre passe-bas avec un filtre de Butterworth) *On se donne la réponse fréquentielle correspondant à un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c.*

1. *Choisir l'ordre N du filtre de Butterworth,*
2. *On définit le changement de variable $p' = \frac{p}{2\pi f_c}$. Le filtre analogique de Butterworth associé est :*

$$H'(p) = H(\frac{p}{2\pi f_c}) = \frac{1}{B_N(\frac{p}{2\pi f_c})}$$

3. *La réponse fréquentielle du nouveau filtre est alors*

$$|\widehat{H}'(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{f}{f_c})^{2N}}}$$

Méthodologie 2 (Synthèse d'un filtre passe-haut avec un filtre de Butterworth) *On se donne la réponse fréquentielle correspondant à un filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure f_c.*

1. *Choisir l'ordre N du filtre de Butterworth*
2. *On définit le changement de variable $\frac{1}{p'} = \frac{p}{2\pi f_c}$. Le filtre analogique de Butterworth associé est :*

$$H'(p) = H(\frac{2\pi f_c}{p}) = \frac{1}{B_N(\frac{2\pi f_c}{p})}$$

3. *La réponse fréquentielle du nouveau filtre est alors*

$$|\widehat{H}'(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f_c}{f})^{2N}}}$$

Méthodologie 3 (Synthèse d'un filtre passe-bande avec un filtre de Butterworth) *On se donne la réponse fréquentielle correspondant à un filtre passe-bande idéal de fréquence de coupure f_1 et f_2.*

1. *On pose $B = f_2 - f_1$ et $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$.*
2. *Choisir l'ordre N du filtre de Butterworth.*
3. *On définit le changement de variable*

$$p' = \frac{f_0}{B}\left(\frac{p}{2\pi f_0} + \frac{2\pi f_0}{p}\right)$$

   Calculer le filtre analogique de Butterworth associé :

$$\widehat{H}'(p) = \widehat{H}(p') = \frac{1}{B_N(p')}$$

4. *La réponse fréquentielle du nouveau filtre est alors*

$$|\widehat{H}'(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + g(f)^{2N}}}$$
$$g(f) = \frac{f_0}{B}\left(\frac{f}{f_0} + \frac{f_0}{f}\right)$$

Remarque 2 *Pour la synthèse d'un passe-bande et d'un coupe-bande, on a en fait qu'une approximation des propriétés souhaitées. La réponse fréquentielle est bien nulle en la fréquence nulle et en la fréquence infinie.*

$$\lim_{f\to 0} |\widehat{H}'(f)| = \lim_{f\to +\infty} |\widehat{H}'(f)| = 0$$

Les fréquences $f = f_1$ et $f = f_2$ ne sont pas exactement les fréquences de coupures :

$$|\widehat{H}(f_1)| = |\widehat{H}(f_2)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1+\frac{f1}{f2}}{1-\frac{f1}{f2}}\right)^{2N}}} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

L'allure globale de la réponse fréquentielle est d'être croissante sur l'intervalle $[0, f_0]$ (intervalle contenant f_1) et décroissante sur l'intervalle $[f_0, +\infty[$ (intervalle contenant f_2).

Méthodologie 4 (Synthèse d'un filtre coupe-bande avec un filtre de Butterworth) *On se donne la réponse fréquentielle correspondant à un filtre passe-bande idéal de fréquence de coupure f_1 et f_2.*

1. *On pose $B = f_2 - f_1$ et $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$.*
2. *Choisir l'ordre N du filtre de Butterworth.*

3. *On définit le changement de variable*

$$\frac{1}{p'} = \frac{f_0}{B}\left(\frac{p}{2\pi f_0} + \frac{2\pi f_0}{p}\right)$$

Calculer le filtre analogique de Butterworth associé :

$$\widehat{H}'(p) = \widehat{H}(p') = \frac{1}{B_N(p')}$$

4. *La réponse fréquentielle du nouveau filtre est alors*

$$|\widehat{H}'(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+g(f)^{2N}}}$$
$$g(f) = \frac{B}{f_0}\frac{1}{\frac{f}{f_0}+\frac{f_0}{f}}$$

10.3 Transformée Bilinéaire

Nous avons comment faire la synthèse de filtres analogiques. Mais pour appliquer cela il faudrait un outil qui définissent les coefficients d'un filtre numériques en fonction des coefficients d'un filtre analogiques. Nous avons déjà vu précédemment l'invariant impulsionnel qui propose de considérer comme filtre numérique, celui associé à l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle. Mais cette transformation ne convient pas ici, parce qu'il est difficile de calculer la réponse impulsionnelle et que d'autre part l'invariant impulsionnel suppose que la réponse fréquentielle du filtre analogique soit nulle en deça de $f_e/2$ où f_e est la fréquence d'échantillonnage, et justement cette réponse fréquentielle n'est en général pas nulle sur cet intervalle.

La transformée bilinéaire est une autre transformation qui à un filtre analogique associe le filtre numérique dont la fonction de transfert $H^{\#}(z)$ est calculé à partir de la fonction de transfert du filtre analogique $H(p)$

$$H(p) = H^{\#}(z) \text{ où } p = \frac{2}{T_e}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

T_e est la période d'échantillonnage. Si le filtre analogique est stable, le filtre numérique le sera aussi et si le filtre numérique est stable, c'est que le filtre analogique l'était aussi. La réponse fréquentielle du filtre numérique $\widehat{H}^{\#}(f)$ peut aussi se déduire de la réponse fréquentielle du filtre analogique $\widehat{H}(f)$

Si on pose :

$$f = \frac{f_e}{\pi}\tan(\frac{\pi f^{\#}}{f_e}) \tag{10.1}$$

alors $\widehat{H}(f) = \widehat{H}^{\#}(f^{\#})$

La figure 10.2 permet d'illustrer comment calculer la réponse fréquentielle du filtre numérique à partir de la réponse fréquentielle du filtre analogique. En haut à gauche se trouve la réponse fréquentielle du filtre de fonction de transfert $H(p) = \frac{1}{p+1}$, notée $\widehat{H}(f)$. En haut à droite se trouve la réponse fréquentielle de $H^{\#}(z) = \frac{1+z^{-1}}{2}$, notée $\widehat{H}^{\#}(f^{\#})$, elle est obtenue en appliquant la transformée bilinéaire sur le filtre H. Le trait en pointillé en haut joint un point de la réponse fréquentielle de $\widehat{H}(f)$ avec un point de la réponse fréquentielle de $\widehat{H}^{\#}(f^{\#})$ mais à une différente fréquence (et en l'occurence à plusieurs autres fréquences, étant donné que la réponse fréquentielle $\widehat{H}^{\#}(f^{\#})$ est en réalité périodique de période f_e). L'objet des deux graphiques en dessous est de donner une méthode graphique pour déterminer $f^{\#}$ en fonction de f. Le graphique en bas à gauche représente la bissectrice et permet de positionner sur l'axe des ordonnées la fréquence qui se trouvait sur l'axe des abscisses. Ainsi la position verticale du trait plein horizontal est en fait liée à la position horizontale du trait plein vertical, elle-même liée à la fréquence du premier point étudié. Le graphique en bas à droite permet ensuite de transformer une fréquence f (axe des ordonnées) en une fréquence $f^{\#}$ (axe des abscisses) ; l'équation de cette courbe est données par (10.1).

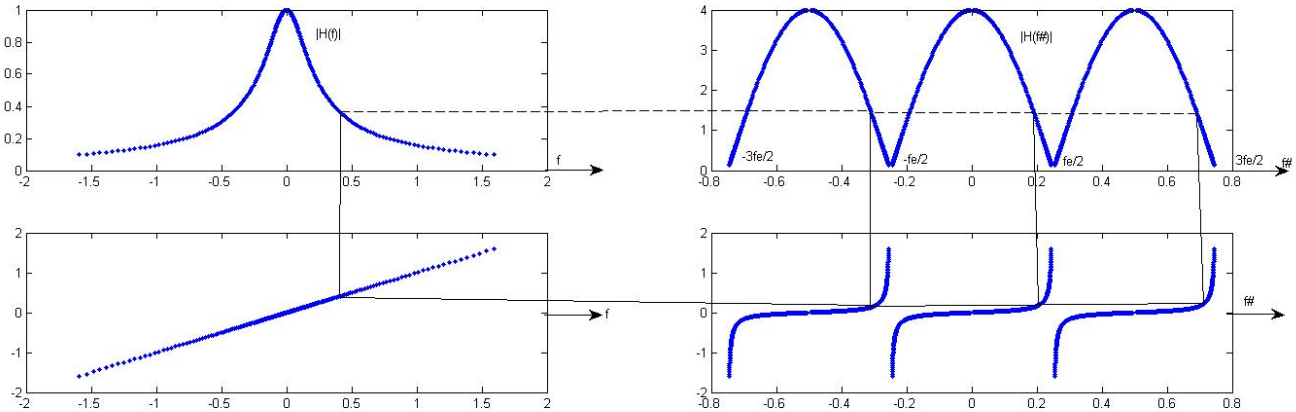


Figure 10.2: En haut à gauche : réponse fréquentielle du filtre analogique $\frac{1}{p+1}$. En haut à droite : réponse fréquentielle du filtre numérique $\frac{1+z^{-1}}{2}$. En bas à gauche : bissectrice qui change l'abscisse en ordonnée. En bas à droite : compression des fréquences qui transforme f en $f^{\#}$.

10.4 Synthèse d'un filtre numérique par un filtre de Butterworth

On pourrait penser que pour synthétiser un filtre numérique, il suffit de synthétiser un filtre analogique du type souhaité (passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande) et avec la/les fréquences de coupure souhaitées, et d'appliquer la transformée bilinéaire. Malheureusement en faisant cela on aura bien un filtre numérique du type souhaité mais avec a priori les mauvaises fréquences de coupure, parce que modifiées par la transformée bilinéaire. Il faut donc au préalable calculer la/les valeurs des fréquences de coupures du filtre analogiques f_c qui soient telles qu'après l'application de la transformée bilinéaire on puisse avoir les fréquences de coupures $f_c^{\#}$ souhaitées. Cela se fait en appliquant (10.1) à $f_c^{\#}$. Une astuce qui permet de simplifier les calculs consiste à combiner les deux transformations, celle permettant de modifier la fréquence de coupure du filtre analogique et celle associée à la transformée bilinéaire. On peut alors appliquer la transformation globale à un des filtres de Butterworth.

Méthodologie 5 (Synthèse d'un filtre numérique par un filtre de Butterworth) *On se donne un gabarit que le filtre numérique doit respecter et une fréquence d'échantillonnage f_e.*

1. *Calculer le gabarit que devrait respecter le filtre analogique si le filtre numérique est déduit du filtre analogique avec une transformée bilinéaire. On applique*

$$f^{\#} \mapsto f = \frac{f_e}{\pi} \tan(\frac{\pi f^{\#}}{f_e})$$

2. *Calculer l'ordre du filtre de Butterworth et la transformation $p \mapsto p'$*

3. *Calculer la nouvelle transformation $z \mapsto p'$ sachant que $p = \frac{2}{T_e}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$:*

$$H^{\#}(z) = H'(p) = H(p')$$

où H est le filtre de Butterworth défini à partir des polynômes de Butterworth et $H^{\#}$ est le filtre numérique souhaité.

4. *En déduire le filtre numérique de Butterworth.*

10.5 Synthèse avec d'autres filtres

Méthodologie 6 (Synthèse d'un filtre numérique avec un autre type de filtre) *L'étape 2 est modifiée, parce que pour les autres filtres il n'y a pas forcément que l'ordre du filtre à déterminer.*

Propriétés 1 (Les autres filtres) *1. Le filtre de Tchebycheff de type 1 présente des ondulations dans la bande passante.*

2. Le filtre de Tchebycheff de type 2 présente des ondulations constantes dans la bande atténuée

3. Le filtre elliptique (ou filtre de Cauer) présente des ondulations constantes à la fois dans la bande passante et dans la bande atténuée, mais au prix d'une distortion de phase plus forte.

4. Le filtre de Bessel a une réponse indicielle optimale.

Appendix A

Rappel sur les complexes

A.1 Écriture d'un complexe

Dans le cadre de ce cours, on note j, le complexe imaginaire dont le carré vaut -1.

$$j^2 = -1$$

Les complexes sont notés

$$z = a + jb$$

a est la partie réelle de z notée $\Re e(z)$ et b est la partie imaginaire de z notée $\Im m(z)$. On peut interprêter un complexe comme un point dans un plan dont la première coordonnée est a et la deuxième coordonnée est b.

A.2 Représentation angulaire de complexes de module 1

Certains complexes peuvent s'écrire comme

$$z = e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

θ est l'argument de ce complexe, il est aussi appelé parfois la phase. Quand $z = 0$, cet argument n'est pas défini [1]. Parmi ces complexes, on trouve

$$\begin{aligned} e^{j0} &= 1 \\ e^{j\frac{\pi}{2}} &= j \\ e^{j\pi} &= -1 \\ e^{j\frac{3\pi}{2}} &= -j \\ e^{j2\pi} &= 1 \end{aligned}$$

Avec l'interprétation géométrique, tous ces complexes sont sur le cercle unité de centre 0 et de rayon 1.

A.3 Module et argument d'un complexe

Tous les complexes s'écrivent [2]

$$z = re^{j\theta}, \text{ avec } \theta \in [-\pi, \pi[$$

On note $r = |z|$ c'est ce qu'on appelle le module de z. On note $\theta = \arg(z)$, c'est ce qu'on appelle l'argument.

[1] En effet pour tout θ, $0 = 0e^{j\theta}$.

[2] Il existe différentes conventions pour définir $\arg(z)$.

A.3.1 Argument d'un complexe

On dispose de règles de calcul. Il existe k entier positif ou négatif tel que [3]

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi \text{ et } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) - 2k\pi \tag{A.1}$$

Il est possible de déterminer l'argument en fonction du complexe.

$$\arg(a+jb) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si} \quad a > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad a = 0, b > 0 \\ -pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si} \quad a > 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad a = 0, b < 0 \\ pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si} \quad a > 0, b < 0 \end{cases}$$

Ce calcul est implémenté dans Matlab/Octave avec la fonction `angle`. Dans le cadre de cette formation, on ne cherche pas à déterminer exactement l'argument et on se contente de déterminer cet argument modulo π.

Il existe k entier positif ou négatif

$$\arg(a+jb) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad k\pi$$

A.3.2 Module d'un complexe

On dispose de règles de calcul

$$|z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2| \text{ et } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Il est possible de déterminer l'argument en fonction du complexe.

$$|a+jb| = \sqrt{a^2+b^2}$$

[3] Dans l'équation (A.1), on n'a pas toujours l'égalité parfois il y a une différence qui est un multiple de 2π. Ainsi $0 = \arg(1) = \arg(jjjj) = (\frac{pi}{2} + \frac{pi}{2} + \frac{pi}{2} + \frac{pi}{2}) - 2\pi$.

Appendix B

Justification des égalités de Parseval

Il s'agit ici de montrer le lien entre les égalités de Parseval et le reste du cours de traitement numérique du signal.

B.1 Cas d'un signal temps continu non-périodique

L'égalités de Parseval peut se voir comme un cas particulier du fait que le spectre associé à un signal qui résulte d'un produit de convolution de deux signal est le produit des spectres de ces deux signaux.

Considérons un signal $x(t)$ temps continu et non-périodique. L'énergie de ce signal est donné par (2.3) dans la section 2.4 (p. 13) :

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt$$

La section 3.5.1 (p. 18) affirme (3.7) :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{X}(f)|^2 \, df$$

Il est assez simple de montrer le lien avec le produit de convolution. Soit $y(t) = x(-t)$, alors le changement de variable $t' = -t$ montre que

$$\widehat{Y}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} \, dt = \int_{+\infty}^{-\infty} y(-t')e^{j2\pi ft'} \, (-dt') = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{j2\pi ft'} \, dt' = \overline{\widehat{X}(f)}$$

Soit $z(t) = x(t) * y(t)$. Alors

$$z(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(-\tau) \, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(\tau) \, d\tau = E_x$$

Du fait des propriétés de la transformée de Fourier et du produit de convolution,

$$z(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{Z}(f) \, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{X}(f)\widehat{Y}(f) \, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{X}(f)\overline{\widehat{X}(f)} \, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{X}(f)|^2 \, df$$

B.2 Cas d'un signal temps continu et périodique

Soit $x(t)$ un signal temps continu et périodique de période T. Dans la section 2.4, (p. 13), la puissance s'exprime ainsi (2.2) :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$$

Dans la section 3.3, (p. 16, la puissance s'exprime aussi en fonction des coefficients de la transformée de Fourier :

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{X}_k\right|^2$$

La justification utilise ici le fait que les exponentielles complexes forment en quelque sorte une base des fonctions périodiques.

1. $x(t)$ s'exprime en fonction de $\widehat{X}_k$ au moyen de la transformée de Fourier inverse (3.1)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{X}_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$$

2. Les différentes exponentielles complexes forment une base orthonormée pour le produire scalaire généralement utilisé pour les fonctions périodiques :

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{j2\pi k \frac{t}{T}} e^{-j2\pi l \frac{t}{T}}\, dt = \delta_{k-l}$$

   Ce résultat se démontre en explicitant la primitive qui est, soit t lorsque $k = l$, soit $\frac{T}{j2\pi(k-l)} e^{j2\pi(k-l)\frac{t}{T}}$ qui est une fonction périodique. Le calcul de l'intégrale donne 1 dans le premier cas et 0 dans l'autre cas.

3. La propriété (3.4) énoncée p. 17 section 3.3 indique que :

$$\widehat{X}_{-k} = \overline{\widehat{X}_k}$$

4. Ces propriétés permettent de faire le calcul suivant.

   D'après la propriété 1

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{X}_k \widehat{X}_l e^{j2\pi(k+l)\frac{t}{T}} \right) dt$$

   D'après la propriété 2

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\, dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{X}_k \widehat{X}_{-k}$$

   D'après la propriété 3

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\, dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{X}_k \overline{\widehat{X}_k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{X}_k\right|^2$$

B.3 Cas d'un signal temps discret non-périodique

Soit x_n un signal temps discret non-périodique. Soit T_e la période d'échantillonnage et f_e la fréquence d'échantillonnage. Dans la section 2.4, (p. 13), l'énergie s'exprime ainsi (2.5) :

$$E = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n^2$$

Dans la section 4.2, (p. 22), la puissance s'exprime aussi en fonction des coefficients de la transformée de Fourier :

$$E = \frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} |\widehat{X}(f)|^2\, df$$

La justification se fait exactement de la même façon que pour la section B.2, il n'y a que les notations qui changent.

1. $\widehat{X}(f)$ s'exprime en fonction de x_n au moyen de la transformée de Fourier à temps discret (4.1)

$$\widehat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n T_e}$$

2. Les différentes exponentielles complexes forment une base orthonormée pour le produire scalaire généralement utilisé pour les fonctions périodiques :

$$\frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} e^{j2\pi k f T_e} e^{-j2\pi l f T_e}\, df = \delta_{k-l}$$

Ce résultat se démontre en explicitant la primitive qui est, soit f lorsque $k = l$, soit $\frac{1}{j2\pi T_e(k-l)} e^{j2\pi(k-l)fT_e}$ qui est une fonction périodique. Le calcul de l'intégrale donne 1 dans le premier cas et 0 dans l'autre cas.

3. Comme le signal x_n est à valeurs réelles, le conjugué de la transformée de Fourier s'exprime ainsi :

$$\overline{\widehat{X}(f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi f n T_e}$$

4. Ces propriétés permettent de faire le calcul suivant.

D'après les propriétés 1 et 3

$$\frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \left|\widehat{X}(f)\right|^2 df = \frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \widehat{X}(f)\overline{\widehat{X}(f)}\, df$$
$$= \frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_m e^{-j2\pi f m T_e} x_n e^{j2\pi f n T_e}\, df$$

et

$$\frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \left|\widehat{X}(f)\right|^2 df = \frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_m x_n e^{-j2\pi f (m-n) T_e}\, df$$

D'après la propriété 2

$$\frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \left|\widehat{X}(f)\right|^2 df = \sum_{m\in\mathbb{Z}} x_m x_m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n^2$$

B.4 Cas d'un signal temps discret périodique

Soit x_n un signal temps discret périodique de période N. Soit T_e la période d'échantillonnage et f_e la fréquence d'échantillonnage. Dans la section 2.4, (p. 13), la puissance s'exprime ainsi (2.4) :

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n^2$$

Dans la section 4.4, (p. 26), d'après (4.12), la puissance s'exprime aussi en fonction des coefficients de la transformée de Fourier :

$$P = \sum_{k=0}^{N-1} \left|\widehat{X}_k\right|^2$$

La justification est un peu différente car elle utilise le produit scalaire généralement utilisé pour les suites périodiques.

1. $\widehat{X}_k$ s'exprime en fonction de x_n au moyen de la transformée de Fourier discrète (4.8)

$$\widehat{X}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$$

2. Les différentes exponentielles complexes forment une base orthonormée pour le produire scalaire généralement utilisé pour les suites périodiques :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{kn}{N}} e^{-j2\pi\frac{ln}{N}} = \delta_{k-l}$$

   - Si $k = l$, alors le terme de la série est 1 et la somme normalisée vaut 1.
   - Si $k \neq l$, cette expression s'interprète comme la somme d'une suite géométrique

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{(k-l)n}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j2\pi\frac{(k-l)}{N}}\right)^n = \frac{1-\left(e^{j2\pi\frac{(k-l)}{N}}\right)^N}{1-\left(e^{j2\pi\frac{(k-l)}{N}}\right)} = \frac{1-e^{j2\pi(k-l)}}{1-e^{j2\pi\frac{(k-l)}{N}}} = 0$$

   Le numérateur de la dernière expression est nulle parce que $k - l$ est un entier.

3. Comme le signal x_n est à valeurs réelles, le conjugué de la transformée de Fourier discrète s'exprime ainsi :

$$\overline{\widehat{X}_k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{j2\pi\frac{kn}{N}}$$

4. Ces propriétés permettent de faire le calcul suivant.

   D'après les propriétés 1 et 3

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left|\widehat{X}_k\right|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\widehat{X}_k\overline{\widehat{X}_k} = \frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x_m e^{-j2\pi\frac{km}{N}} x_n e^{j2\pi\frac{kn}{N}}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left|\widehat{X}_k\right|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x_m\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi\frac{k(m-n)}{N}}\right)$$

   D'après la propriété 2

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left|\widehat{X}_k\right|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} x_m\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n\delta_{n-m}\right) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_m^2$$

Appendix C

Exemple de calculs

C.1 Calcul de la transformée de Laplace inverse d'une fonction de transfert dont le dénominateur contient une racine double

On s'intéresse ici à

$$H(p) = \frac{p-1}{(p+1)^2}$$

Le dénominateur est un polynôme qui a une racine double en $p = -1$. La décomposition en élément simple du polynôme se fait en cherchant a et b tel que

$$H(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{(p+1)^2} = \frac{b + a(p+1)}{(p+1)^2} = \frac{(b+a) + ap}{(p+1)^2}$$

Cette décomposition se fait avec $a = 1$ et $b = -2$.

$$H(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{2}{(p+1)^2}$$

L'utilisation de (7.22), p. 49, donne

$$h(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t) - 2te^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t) = (1-2t)e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t)$$

C.2 Exemple de calcul de la transformée en Z inverse d'une fonction de transfert dont le dénominateur contient une racine double

On cherche ici à calculer la transformée en Z inverse de

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1 + z^{-1})^2}$$

Le dénominateur contient une racine double en $z = -1$. Aussi en application de (8.18), p. 56, il existe a et b tel que

$$h_n = (an + b)(-1)^n \mathbf{1}_{\mathbb{N}}[n]$$

La relation entrée-sortie associée à cette fonction de transfert est

$$y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} = x_n - x_{n-1} \tag{C.1}$$

On place en entrée $x_n = \delta_n$. L'application de (C.1) pour $n = 0$ montre qu'alors $y_0 + 2 \times 0 + 1 \times 0 = 1 - 1 \times 0$ et donc $y_0 = 1$. L'application de (C.1) pour $n = 1$ montre qu'alors $y_1 + 2y_0 + 1 \times 0 = 1 \times 0 - 1$ et donc $y_1 = -3$. Les valeurs de y_n sont celles de h_n et par suite ces calculs permettent d'en déduire les valeurs de a et de b :

$$\begin{aligned}
(a \times 0 + b) \times 1 &= h_0 = 1 \Rightarrow b = 1 \\
(a \times 1 + b) \times (-1) &= h_1 = -3 \Rightarrow a + b = 3 \Rightarrow a = 2
\end{aligned}$$

Par ailleurs h_n vérifie (C.1) pour $n \geq 2$ lorsque $x_n = \delta_n$:

$$\begin{aligned} y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} &= (2n+1)(-1)^n + 2(2(n-1)+1)(-1)^{n-1} + (2(n-2)+1)(-1)^{n-2} \\ y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} &= (2n+1+2n-3-4n+2)\,(-1)^{n-1} = 0 = \delta_n - \delta_{n-1} = x_n - x_{n-1} \end{aligned}$$

On a finalement bien prouvé que

$$h_n = (2n+1)(-1)^n \mathbf{1}_{\mathbb{N}}[n]$$

Appendix D

Trouver les paramètres d'un signal sinusoïdal ajouté à une composante continue

L'objectif est de trouver les valeurs de a, b, f_0, φ à partir de la courbe représentative du signal temps continu ainsi défini :

$$x(t) = a + b\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

Sur la courbe représentative du signal, on cherche à mesurer les valeurs suivantes :

- $\max x(t)$: valeur du maximum du signal
- $\min x(t)$: valeur du minimum du signal
- T : période du signal
- $\tau = \arg\max x(t)$: un instant où le signal est maximal

Ces quantités sont illustrées sur la figure D.1. Elles permettent d'en déduire les quantités à retrouver.

$$\begin{cases} a & = & \frac{\max x(t) + \min x(t)}{2} \\ b & = & \frac{\max x(t) - \min x(t)}{2} \\ f_0 & = & \frac{1}{T} \\ \tau & = & \arg\max x(t) \\ \varphi & = & -2\pi f_0 \tau \end{cases}$$

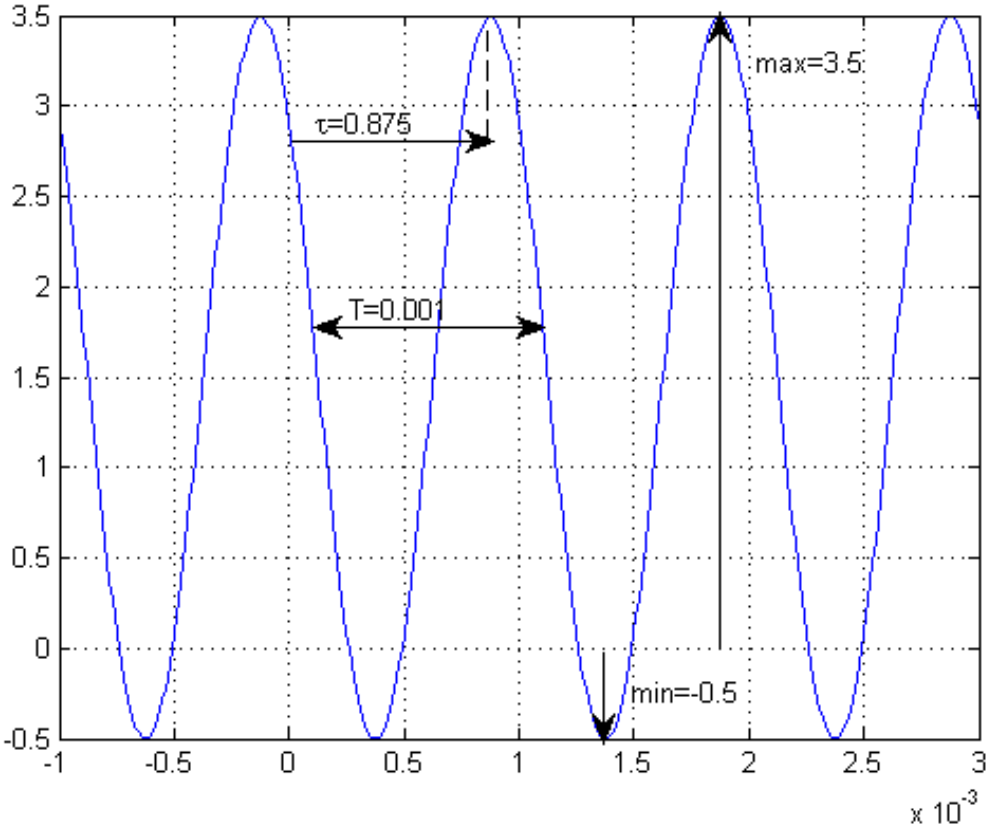


Figure D.1: Signal sinusoïdal ajouté à une composante continue.

Appendix E

Exemple de correction d'exercices

E.1 Énoncé

On cherche à estimer l'impact de l'utilisation d'une fenêtre triangulaire pour synthétiser un filtre passe-bas. On suppose que l'on considère des signaux échantillonnés à fe et que l'on a réalisé la synthèse d'un filtre numérique passe-bas de fréquence de coupure f_c, avec une réponse impulsionnelle causale qui contient $2N+1$ termes non-nuls. La fenêtre rectangulaire est donnée par

$$r_n = \mathbf{1}_{\{-N\ldots N\}}[n]$$

Elle a pour transformée de Fourier à temps discret

$$\widehat{R}(f) = \frac{\sin(\pi(N+1)fT_e)}{\sin(\pi f T_e)}$$

La fenêtre triangulaire est donnée par

$$t_n = \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right)\mathbf{1}_{\{-N\ldots N\}}[n]$$

Elle a pour transformée de Fourier à temps discret

$$\widehat{T}(f) = \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2(\pi(N+1)fT_e)}{sin^2(\pi f T_e)}$$

Question 1 Montrez que la réponse fréquentielle du filtre synthétisé est donnée par

$$\widehat{H}_R(f) = \frac{1}{f_e}\int_{f-f_c}^{f+f_c} \widehat{R}(\nu)\,d\nu$$
$$\widehat{H}_T(f) = \frac{1}{f_e}\int_{f-f_c}^{f+f_c} \widehat{T}(\nu)\,d\nu$$

Question 2 Donnez la largeur des lobes du sinus cardinal en terme de bande de fréquences et montrez que si N est grand devant f_e/f_c alors la largeur de ces lobes est petite devant fc.

Question 3 En utilisant cette approximation (N grand devant f_e/f_c), montrez que

$$\widehat{H}_R(f_c) \approx \widehat{H}_T(f_c) \approx \frac{1}{2}$$

E.2 Correction

E.2.1 Question 1

Je démontre d'abord le fait que pour deux signaux à temps discret a_n et b_n de transformée de Fourier à temps discret $\widehat{A}(f)$ et $\widehat{B}(f)$

$$a_n b_n = \mathbb{TFTD}^{-1}\left[\frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \widehat{A}(f_1)\widehat{B}(f-f_1)\,df_1\right] \tag{E.1}$$

Du fait des définitions de $\widehat{A}(f)$ et $\widehat{B}(f)$,

$$a_n b_n = \mathbb{TFTD}^{-1}[\widehat{A}(f)]\mathbb{TFTD}^{-1}[\widehat{B}(f)]$$

J'utilise les définitions de la $\mathbb{TFTD}$ et j'utilise deux variables d'intégration différentes

$$a_n b_n = \frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \widehat{A}(f_1)e^{j2\pi f_1 nT_e}\,df_1 \times \frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \widehat{B}(f_2)e^{j2\pi f_2 nT_e}\,df_2$$

Ce produit d'intégrale peut se voir comme une intégrale double et je fais le changement de variable $f_1 = f_1$ et $f = f_1 + f_2$

$$a_n b_n = \frac{1}{f_e^2}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}}\int_{f_1-\frac{f_e}{2}}^{f_1+\frac{f_e}{2}} \widehat{B}(f-f_1)e^{j2\pi(f-f_1)nT_e}\,df\,\widehat{A}(f_1)e^{j2\pi f_1 nT_e}\,df_1$$

La fonction $f \mapsto \widehat{B}(f-f_1)e^{j2\pi(f-f_1)nT_e}$ étant périodique de période f_e cela me permet de changer les bornes de la deuxième intégrale

$$a_n b_n = \frac{1}{f_e^2}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \widehat{B}(f-f_1)e^{j2\pi(f-f_1)nT_e}\,df\,\widehat{A}(f_1)e^{j2\pi f_1 nT_e}\,df_1$$

Après simplification des deux exponentielles complexes en une seule on retrouve (E.1).

Je pose h_n la réponse impulsionne du filtre passe-bas idéal de réponse fréquentielle $\widehat{H}(f) = \mathbf{1}_{[-f_c,f_c]}(f)$ sur l'intervalle $[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}]$. Ensuite l'application de (E.1) montre que :

$$r_n h_n = \mathbb{TFTD}^{-1}\left[\frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \widehat{R}(f_1)\widehat{H}(f-f_1)\,df_1\right]$$

L'application de $\mathbb{TFTD}$ à cette équation et d'autre part le fait d'utiliser la définition de $\widehat{H}(f-f_1)$ montre que

$$\mathbb{TFTD}[h_n r_n] = \widehat{H}_R(f) = \frac{1}{f_e}\int_{f-f_c}^{f+f_c} \widehat{R}(f_1)\,df_1$$

Enfin l'application de (E.1) montre que :

$$t_n h_n = \mathbb{TFTD}^{-1}\left[\frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \widehat{T}(f_1)\widehat{H}(f-f_1)\,df_1\right]$$

L'application de $\mathbb{TFTD}$ à cette équation et d'autre part le fait d'utiliser la définition de $\widehat{H}(f-f_1)$ montre que

$$\mathbb{TFTD}[h_n t_n] = \widehat{H}_T(f) = \frac{1}{f_e}\int_{f-f_c}^{f+f_c} \widehat{T}(f_1)\,df_1$$

E.2.2 Question 2

La fonction $f \mapsto \sin(\pi(N+1)fT_e)$ s'annule en tous les multiples de $\frac{f_e}{N+1}$ sauf en $f = 0$. Aussi les lobes de $\widehat{R}(f)$ et de $\widehat{T}(f)$ sont de largeur $\frac{f_e}{N+1}$, sauf le lobe central qui est deux fois plus large.

Quand N est grand devant f_e/f_c alors $\frac{f_e}{(N+1)f_c}$ est petit devant 1 et $\frac{f_e}{N+1}$ est petit devant f_c.

E.2.3 Question 3

Dans un premier temps je considère $f_c \leq \frac{f_e}{4}$.

$$\widehat{H}_R(f_c) = \frac{1}{f_e}\int_0^{2f_c} \widehat{R}(\nu)\,d\nu \approx \frac{1}{f_e}\int_0^{\frac{f_e}{2}} \widehat{R}(\nu)\,d\nu$$

L'approximation est justifié par le fait que $\widehat{R}(\nu)$ est faible sur l'intervalle $[2f_c, f_e/2]$ parce que les lobes sont petits devant f_c. Par ailleurs $\widehat{R}(\nu) = |\widehat{R}(\nu)|$ est une fonction paire

$$\frac{1}{f_e}\int_0^{\frac{f_e}{2}} \widehat{R}(\nu)\,d\nu = \frac{1}{2}\frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \widehat{R}(\nu)\,d\nu = \frac{1}{2}r[0] = \frac{1}{2}$$

En reliant les deux équations, on trouve l'approximation demandée.

Dans une deuxième temps je considère $f_c \geq \frac{f_e}{4}$ avec toujours $f_c < \frac{f_e}{2}$. J'utilise une autre approximation N grand devant $\frac{f_e}{f_e - 2f_c}$. La périodicité de $\widehat{R}$ montre que :

$$\widehat{H}_R(f_c) = \frac{1}{f_e}\int_0^{2f_c} \widehat{R}(\nu)\,d\nu = \frac{1}{f_e}\int_0^{\frac{f_e}{2}} \widehat{R}(\nu)\,d\nu + \frac{1}{f_e}\int_{-\frac{f_e}{2}}^{2f_c - f_e} \widehat{R}(\nu)\,d\nu$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, le premier terme vaut $\frac{1}{2}$. L'approximation considérée maintenant permet d'affirmer que les lobes ont une largeur petite devant $f_e - 2f_c < f_e/2$ et que donc $\widehat{R}(\nu)$ est faible sur l'intervalle $[f_e - 2f_c, \frac{f_e}{2}]$, ce qui par symétrie signifie aussi que $\widehat{R}(\nu)$ est faible sur l'intervalle $[-\frac{f_e}{2}, 2f_c - f_e]$. Le deuxième terme est donc de valeur faible. Ainsi se trouve justifié l'approximation dans le deuxième cas.

Le raisonnement est le même pour $\widehat{H}_T(f_c)$.

Appendix F

Calcul avec les intégrales et les fonctions caractéristiques

On appelle fonction caractéristique

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \tag{F.1}$$

Quand A est un intervalle, la fonction caractéristique est en fait une porte.

$$\mathbf{1}_[a,b](x) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ si } x < a \\ 0 \text{ si } x > b \end{cases} \tag{F.2}$$

Il est possible de déplacer les termes au sein de la définition de la fonction caractéristique sur un intervalle

$$\mathbf{1}_{[a,b]}(t) = \mathbf{1}_{[a-t,b-t]}(0) = \mathbf{1}_{[0,b-a]}(t-a) \tag{F.3}$$

Cette fonction permet de transformer une intégrale sur un intervalle en une intégralle sur $\mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(t), dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a,b]}(t) f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[a,b]}(t) f(t)\, dt \tag{F.4}$$

L'intégrale de cette fonction porte est

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a,b]}(t)\, dt = b - a \tag{F.5}$$

Le centre de cette fonction porte est

$$\int_{\mathbb{R}} t\mathbf{1}_{[a,b]}(t)\, dt = \frac{a+b}{2} \tag{F.6}$$

Appendix G

Différentes techniques pour représenter le module d'une réponse fréquentielle

Les simulations numériques permettent de visualiser rapidement le module de la réponse fréquentielle d'un filtre. Cela étant il peut être intéressant d'avoir quelques techniques permettant dans certains cas simples d'en obtenir aussi une allure.

G.1 $|\widehat{H}(f)| = |1 + e^{j\alpha f}|$

G.2 $|\widehat{H}(f)| = |1 + e^{j\alpha f}|$

Appendix H

Bibliographie

Dans le livre [2], les probabilités sont présentées dans l'annexe A. Le traitement du signal se trouve dans l'annexe B et dans les sections 2.3, 2.4.1 et 2.5 du chapitre 2. La psychoacoustique est présentée en section 2.2.3 du chapitre 2. Le traitement du son se trouve dans dans les sections 2.2, 2.4 et 2.5 du chapitre 2 et la section 12.3 du chapitre 12.

Dans le livre [3], le traitement du signal est présenté dans les chapitres 1 et 2. En particulier la synthèse des filtres est faite différemment. La psychoacoustique est présentée dans l'annexe C.

Dans le livre [1], le traitement du signal est présenté dans les chapitre 1, où se trouve aussi quelques notions sur le bruit rose. Le chapitre 5 présente les notions de psychoacoustiques.

Bibliography

[1] Federico Avanzini and Giovanni De Poli. *Fundamentals of digital audio processing.* Creative Commons, 2005.

[2] Francesco Camastra and Alessandro Vinciarelli. *Machine Learning for Audio, Image and Video Analysis: Theory and Applications (Advanced Information and Knowledge Processing).* Springer-Verlag, first edition, 2008.

[3] David Rocchesso. *Introduction to Sound Processing.* Creative Commons, 2003.