Examen théorie du signal (3 heures)
L3SPI

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Une copie double manuscrite est autorisée.

Exercice 1 *On considère un signal* $x(t) = \delta(t) - (1-i)\delta(t-1) - (1+i)\delta(t-2) + (1-i)\delta(t-3) + i\delta(t-4)$. *On définit un deuxième signal* $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$.

.1. *Calculez* $y(t)$ *et montrez que*

$$y(t) = \mathbf{1}_{[0,1[}(t) + i\mathbf{1}_{[1,2[}(t) - \mathbf{1}_{[2,3[}(t) - i\mathbf{1}_{[3,4[}(t) \tag{1}$$

.2. *Représentez en fonction du temps* $\Re e(y(t))$ *et* $\mathbb{I}\mathrm{m}(y(t))$.

.3. *Représentez les complexes contenus dans l'ensemble* $\{z|\exists t, z = y(t)\}$. *Le signal* $y(t)$ *prend un certain nombre de valeurs complexes et cet ensemble regroupe tous ces complexes.*

.4. *Calculez la transformée de Fourier de* $y(t)$ *notée* $Y(\nu)$ *et montrez que*

$$Y(\nu) = \frac{1-e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}\frac{1-e^{-8i\pi\nu}}{1-ie^{-2i\pi\nu}}$$

.1. On pose $H(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$

$$\begin{aligned} y(t) &= H(t) - (1-i)H(t-1) - (1+i)H(t-2) + (1-i)H(t-3) + iH(t-4) \\ &= H(t) - H(t-1) + i(H(t-1) - H(t-2)) - (H(t-2) - H(t-3)) - i(H(t-3) - H(t-4)) \end{aligned}$$

.2.

$$\Re e(y(t)) = \mathbf{1}_{[0,1[}(t) - \mathbf{1}_{[2,3[}(t) \text{ et } \mathbb{I}\mathrm{m}(y(t)) = \mathbf{1}_{[1,2[}(t) - \mathbf{1}_{[3,4[}(t)$$

.3. L'équation (1) peut se lire autrement.

— Pour $t \in [0,1[$, $y(t) = 1$.
— Pour $t \in [1,2[$, $y(t) = i$.
— Pour $t \in [2,3[$, $y(t) = -1$.
— Pour $t \in [3,4[$, $y(t) = -i$.
— Pour $t \notin [0,4[$, $y(t) = 0$.

Donc l'ensemble $\{z|\exists t, z = y(t)\}$ est composé de 5 complexes : $0, 1, i, -1, -i$.

.4. On calcule d'abord que TF $\left[\mathbf{1}_{[0,1]}(t)\right](\nu) = \frac{1-e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$. L'équation (1) permet alors d'affirmer que

$$Y(\nu) = \frac{1-e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}\left[1 + ie^{-2i\pi\nu} - e^{-4i\pi\nu} - ie^{-6i\pi\nu}\right] = \frac{1-e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}\frac{1-(ie^{-2i\pi\nu})^4}{1-(ie^{-2i\pi\nu})}$$

Exercice 2 *On considère deux signaux* $x(t) = e^{-|t|}$ *et* $y(t) = signe(t)x(t)$ *et* $X(\nu), Y(\nu)$ *leurs transformées de Fourier.*

$$signe(t) = \begin{cases} -1 & si \quad t < 0 \\ 0 & si \quad t = 0 \\ 1 & si \quad t > 0 \end{cases}$$

.1. *Calculez* $X(\nu)$ *et montrez que* $X(\nu) = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$.

.2. *Démontrez que*

$$TF\left[\frac{d}{dt}x(t)\right](\nu) = 2i\pi\nu X(\nu) \tag{2}$$

.3. *Déduisez de l'équation (2), que*

$$Y(\nu) = -\frac{4i\pi\nu}{1+4\pi^2\nu^2}$$

.4. On considère un nouveau signal $z(t) = x(t) * \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$, montrez que

$$z(t) = \left\{ \begin{array}{lll} e^t & si & t \leq 0 \\ 2 - e^{-t} & si & t > 0 \end{array} \right.$$

$*$ désigne ici le produit de convolution.

.5. Représentez graphiquement $z(t)$.

Solution :

.1. On applique la transformée de Fourier à $x(t)$ et on découpe l'intégrale en deux parties, d'une part entre $-\infty$ et 0 et d'autre part entre 0 et $+\infty$. Sur chaque intégrale, on enlève les valeurs absolues en en précisant la signification exacte. Sur la première intégrale, on applique un changement de variable $t' = -t$.

$$X(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-2i\pi\nu)}\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-t(1+2i\pi\nu)}\,dt = \frac{1}{1-2i\pi\nu} + \frac{1}{1+2i\pi\nu} = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$$

.2. On procède à une intégration par partie.

$$\mathrm{TF}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-2i\pi\nu t}\,dt = \left[x(t)e^{-2i\pi\nu t}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-2i\pi\nu)e^{-2i\pi\nu t}\,dt = 2i\pi\nu X(\nu)$$

.3. On remarque que $y(t) = -\frac{d}{dt}x(t)$. Aussi

$$Y(\nu) = -\mathrm{TF}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right](\nu) = 2i\pi\nu X(t) = -\frac{4i\pi\nu}{1+4\pi^2\nu^2}$$

.4. On considère d'abord le cas où $t < 0$. On découpe l'intervalle sur lequel on intègre.

$$z(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t-\tau)\,d\tau + \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\,d\tau\; + 0 = e^t$$

On considère ensuite le cas où $t \geq 0$. On découpe l'intervalle sur lequel on intègre.

$$z(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t-\tau)\,d\tau + \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau}\,d\tau\; + \int_0^{t} e^{-\tau}\,d\tau = 1 + (-e^{-t}+1) = 2 - e^{-t}$$

.5. Voici une simulation Matlab permettant d'obtenir le graphique.

```
t=-4:1e-3:4;
z=exp(t).*(t<0)+(2-exp(-t)).*(t>=0);
figure(1); plot(t,z); axis([-4 4 0 2]);
```

La courbe est montrée sur la figure 1.

Exercice 3 *On considère deux signaux périodiques de période 1 définis sur $[0,1]$ par*

$$e_0(t) = \sqrt{2}\sin(\pi t) \;\; et \;\; e_1(t) = \left\{ \begin{array}{lll} e_0(2t) & si & t \leq \frac{1}{2} \\ -e_0(2t-1) & si & t > \frac{1}{2} \end{array} \right. \tag{3}$$

On considère $x(t)$ un signal périodique qui vérifie $x(t) = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(t)$ pour $t \in [0,1[$. On définit un produit scalaire entre deux signaux réels $x_1(t)$ et $x_2(t)$ avec

$$< x_1(t), x_2(t) >= \int_0^1 x_1(t)x_2(t)\,dt$$

qui induit une distance définie entre ces deux signaux par

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 =< x_1(t)-x_2(t), x_1(t)-x_2(t) >= \int_0^1 (x_1(t)-x_2(t))^2\,dt$$

On a approximativement $\frac{1}{\pi} \approx 0.32$ et $\frac{\sqrt{2}}{\pi} \approx 0.45$.

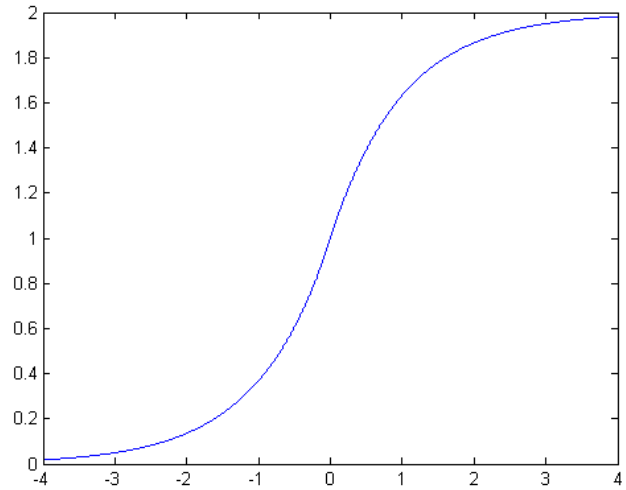

FIGURE 1 – Courbe représentative de $z(t)$

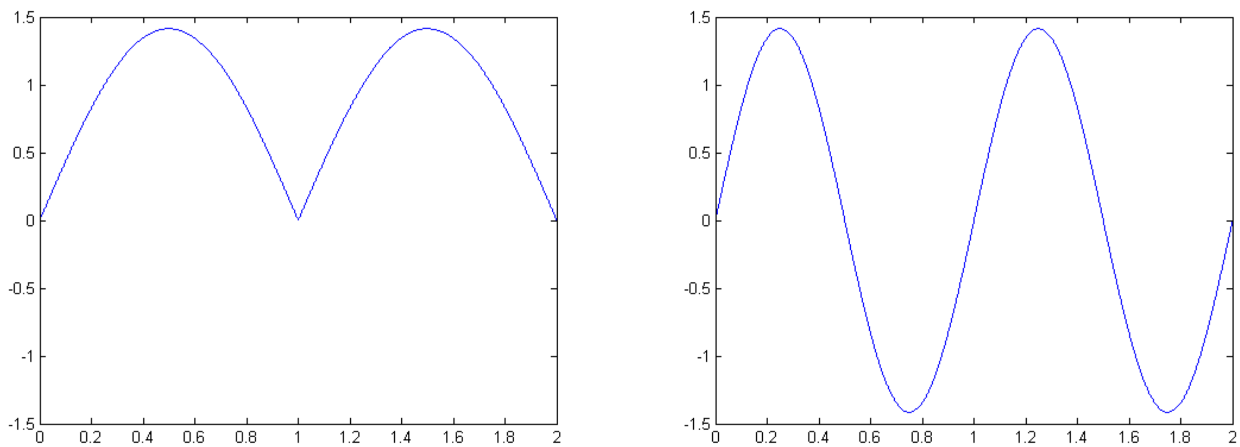

FIGURE 2 – Courbes représentatives de $e_0(t)$ et $e_1(t)$

.1. *Montrez que* $e_1(t) = \sqrt{2}\sin(2\pi t)$ *pour* $t \in [0,1]$. *Représentez graphiquement* $e_0(t)$ *et* $e_1(t)$.

.2. *Expliquez pourquoi* $e_0(t)$ *et* $e_1(t)$ *forment une base orthonormée d'un ensemble de fonctions.*

.3. *On cherche* α, β *tel que* $\|x(t) - \alpha e_0(t) - \beta e_1(t)\|^2$ *soit minimal montrez qu'alors*

$$\alpha =< x(t), e_0(t) >, \ \beta =< x(t), e_1(t) > \tag{4}$$

.4. *En utisant les équations (4), calculez* α, β *et montrez que* $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$.

.5. *Calculez et représentez graphiquement* $x(t)$ *et* $y(t) = \alpha e_0(t) + \beta e_1(t)$ *sur le même graphe.*

Solution

.1. Voici une simulation sous Matlab prouvant le résultat énoncé.

```
t=0:1e-3:2;
e0=@(t)(t>=0).*(t<=1).*sin(pi*t)*sqrt(2);
e1=@(t)(e0(2*t).*(t>=0).*(t<0.5)-e0(2*t-1).*(t>=0.5).*(t<1));
figure(1); plot(t,e0(t)+e0(t-1)); axis([0 2 -1.5 1.5]);
figure(1); plot(t,e1(t)+e1(t-1)); axis([0 2 -1.5 1.5]);
```

La réponse peut être déterminé ainsi.
Si $t \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$e_1(t) = e_0(2t) = \sqrt{2}\sin(2\pi t)$$

Si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$e_1(t) = -e_0(2t-1) = -\sqrt{2}\sin(2\pi t - \pi) = \sqrt{2}\sin(2\pi t)$$

.2. Une base orthonormée vérifie deux caractéristiques, tous les éléménts de la base sont de normes 1 et ils sont tous deux à deux orthogonaux.
— Pour $t \in [0,1]$, $e_0^2(t) = (\sqrt{2})^2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\pi t)$ et donc $\|e_0\|^2 = 1$
— Pour $t \in [0,1]$, $e_1^2(t) = (\sqrt{2})^2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\pi t)$ et donc $\|e_1\|^2 = 1$
— Pour $t \in [0,1]$, $e_0(t)e_1(t) = 2\sin(\pi t)\sin(2\pi t) = -\cos(3\pi t) + \cos(\pi t)$ et donc $< e_0(t), e_1(t) >= 0$.

.3. On note

$$\begin{array}{l} J(\alpha,\beta) = \|x(t) - \alpha e_0(t) - \beta e_1(t)\|^2 \\ = \|x(t)\|^2 - 2\alpha < x(t), e_0(t) > -2\beta < x(t), e_1(t) > +\alpha^2 + \beta^2 \end{array}$$

J est minimal lorsqu'elle annule les dérivées partielles :

$$\begin{array}{lll} 0 = \frac{\partial}{\partial\alpha}J = -2 < x(t), e_0(t) > +2\alpha & \Rightarrow & \alpha =< x(t), e_0(t) > \\ 0 = \frac{\partial}{\partial\beta}J = -2 < x(t), e_1(t) > +2\beta & \Rightarrow & \beta =< x(t), e_1(t) > \end{array}$$

.4.

$$\alpha =< x(t), e_0(t) >= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}\sin(\pi t)\,dt = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[-\cos(\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

$$\beta =< x(t), e_1(t) >= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}\sin(2\pi t)\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left[-\cos(2\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\pi}$$

.5. Voici une simulation Matlab permettant d'obtenir la représentation graphique.

```
t=0:1e-3:2;
x=@(t)(t>=0).*(t<=1/2);
e0=@(t)(t>=0).*(t<=1).*sin(pi*t)*sqrt(2);
e1=@(t)(e0(2*t).*(t>=0).*(t<0.5)-e0(2*t-1).*(t>=0.5).*(t<1));
alpha=sqrt(2)/pi;
figure(1); plot(t,alpha*(e0(t)+e1(t)+e0(t-1)+e1(t-1)),t,x(t)+x(t-1)); axis([0 2 -1.5 1.5]);
```

La figure 3 montre $x(t)$ en vert et $y(t)$ en bleu.

Exercice 4 *On considère un filtre défini par sa relation entrée-sortie transformant $x(t)$ en $y(t)$*

$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t) - x(t-1)$$

.1. Montrez que sa réponse fréquentielle est

$$H(\nu) = e^{-i\pi\nu}\operatorname{sinc}(\pi\nu)$$

.2. À partir de cette réponse fréquentielle, montrez que la réponse impulsionnelle du filtre est

$$h(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$$

.3. On place en entrée de ce filtre un signal $x_\epsilon(t) = \delta(t-\epsilon)$. On note la sortie $y_\epsilon(t)$, montrez que

$$y_\epsilon(t) = \mathbf{1}_{[\epsilon,\epsilon+1]}(t)$$

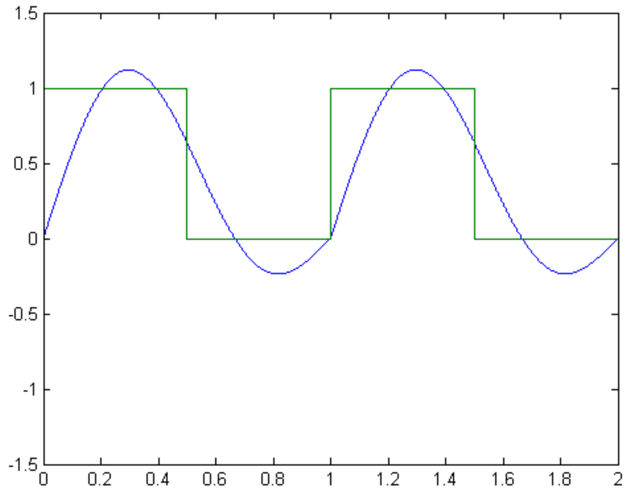

FIGURE 3 – Courbe représentative de $x(t)$ en vert et $y(t)$ en bleu.

.4. *Étant donné un signal réel $z(t)$ et à partir de la définition de l'autocorrélation $\gamma_z(t)$, démontrez que*

$$\gamma_z(t) = z(t) * \tilde{z}(t)$$

où $\tilde{z}(t) = z(-t)$. Attention cette relation n'est valable que si $z(t)$ est réel.

.5. *On suppose ici avoir déjà calculé que*

$$a(t) = (1 - |t-1|)\mathbf{1}_{[0,2]}(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) * \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$$

où $*$ est le produit de convolution. Montrez que l'autocorrélation de la sortie est

$$\gamma_{y_\epsilon}(t) = a(t+1)$$

Solution

.1. À partir de la relation entrée-sortie, on a

$$2i\pi\nu Y(\nu) = X(\nu) - e^{-2i\pi\nu} X(\nu)$$

Et la réponse fréquentielle est donc

$$H(\nu) = \frac{1 - e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu} = e^{-i\pi\nu}\,\mathrm{sinc}(\pi\nu)$$

.2. On remarque que TF $\left[\mathbf{1}_{[0,1]}(t)\right](\nu) = H(\nu)$, aussi $h(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$.

.3. La relation entrée-sortie d'un filtre peut s'écrire avec le produit de convolution

$$y_\epsilon(t) = h(t) * x_\epsilon(t) = h(t-\epsilon) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t-\epsilon) = \mathbf{1}_{[\epsilon,\epsilon+1]}(t)$$

.4. Pour démontrer cette relation, on peut par exemple partir de la définition de l'autocorrélation avec une expression intégrale.

$$\gamma_z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(\tau)z(\tau - t)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} z(\tau)\tilde{z}(t-\tau)\,d\tau = z(t) * \tilde{z}(t)$$

.5. On va utiliser l'expression de l'autocorrélation

$$\gamma_y(t) = y(t) * \tilde{y}(t) \text{ avec } \tilde{y}(t) = y(-t)$$

On remarque que

$$y(t) = \mathbf{1}_{[\epsilon,\epsilon+1]}(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t-\epsilon) \text{ et } \tilde{y}(t) = y(-t) = \mathbf{1}_{[\epsilon,\epsilon+1]}(-t) = \mathbf{1}_{[-\epsilon-1,-\epsilon]}(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t+\epsilon+1)$$

Les règles sur le produit de convolution permettent alors d'affirmer que $\gamma_{y_\epsilon}(t) = a(t-\epsilon+\epsilon+1) = a(t+1)$