Théorie du signal
10 novembre 2021

Table des matières

1 Représentation des signaux non-périodiques, module et argument d'un complexe, distribution de Dirac, indicatrice, calculs de limites, intégrale d'un signal et transformée de Fourier en la fréquence nulle

1.1 Exercices

Exercice 1. $(exTS1)$

On définit un signal $x(t)$ par

$$x(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq -1 \\ 2 & si \quad t \in [-1, 0[\\ 2-t & si \quad t \in [0, 1[\\ t & si \quad t \in [1, 2[\\ 2 & si \quad t \in [2, 3[\\ 0 & si \quad t \geq 3 \end{cases}$$

1. *Tracez la courbe représentative de $x(t)$.*
2. *Calculez $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt$ et montrez que $X(0) = 7$.*

Exercice 2. *(exTS2) On considère un signal noté $x(t)$ et dont la transformée de Fourier est notée $X(\nu)$. Ce signal est une succession de segments joignant les instants $t = 0, 2, 3$: $x(0) = 0$, $x(2) = 1$, $x(3) = 0$. Ce signal est nul pour $t \leq 0$ et pour $t \geq 3$.*

1. *Représentez le signal.*
2. *Exprimez le signal en utilisant l'indicatrice $\mathbf{1}_A(t)$ où A est un intervalle.*
3. *Calculez $X(0)$.*

Exercice 3. *(exTS3) On considère un signal $x(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$, sa transformée de Fourier est notée $X(\nu)$.*

1. *Représentez $x(t)$*
2. *Calculez $X(0)$*

Exercice 4. *(exTS4) On définit $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]}(t)$. Représentez graphiquement $x(t) = t\Pi(t)$. Calculez $X(0)$.*

Exercice 5. *(exTS5) On note $\mathbb{H}(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$. Montrez que*

$$\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[}(t) = \mathbb{H}(t + \frac{1}{2}) - \mathbb{H}(t - \frac{1}{2})$$

Exercice 6. *(exTS86) On définit un signal $x(t)$ par*

$$x(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{[0,1[}(t) + e^{-(t-1)}\mathbf{1}_{[1,2[}(t) + e^{-(t-2)}\mathbf{1}_{[2,3[}(t)$$

Représentez ce signal $x(t)$. Calculez $X(0)$.

2 Symétrie, utilisation de la valeur absolue, transformations des signaux et leurs conséquences sur la transformée de Fourier, module et argument de la transformée de Fourier

2.1 Exercices

Exercice 7. *(exTS67) On considère un signal $x(t)$ dont la transformée de Fourier est notée $X(\nu)$.*

$$X(\nu) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1 + i\nu}$$

Représentez le module et l'argument de $X(\nu)$.

Exercice 8. *(exTS69) On considère un signal $x_1(t)$ et sa transformée de Fourier notée $X_1(\nu)$.*

$$x_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \text{ et } X_1(\nu) = \frac{1}{1 + 2i\pi\nu}$$

1. *Représentez* $|X_1(\nu)|$
2. *Représentez* $\arg(X_1)(\nu)$

Exercice 9. *(exTS6)*
On définit un signal $x(t)$ *par*

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad t \leq -1 \\ 2 & \textit{si} \quad t \in [-1, 0[\\ 2-t & \textit{si} \quad t \in [0, 1[\\ t & \textit{si} \quad t \in [1, 2[\\ 2 & \textit{si} \quad t \in [2, 3[\\ 0 & \textit{si} \quad t \geq 3 \end{cases}$$

Ce signal a déjà été étudié dans l'exercice 1 (p. 1). On considère $y(t) = x(t+1)$.

1. *Montrez que* $y(t)$ *est un signal pair.*
2. *En déduire la valeur de* t_0*, telle que* $x(t)$ *soit symétrique par rapport à* t_0.
3. *Quel est l'argument de* $Y(\nu)$.
4. *Exprimez* $X(\nu)$ *en fonction de* $Y(\nu)$.
5. *Montrez que pour chaque valeur* ν*, il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\arg(X(\nu)) = -2i\pi\nu + k\pi$*, où* $\mathbb{Z}$ *est l'ensemble des entiers positifs et négatifs.*
6. *Montrez que*
$$\Re e(X(\nu)) = \mathrm{TF}\left[\frac{1}{2}x(-t) + \frac{1}{2}x(t)\right](\nu)$$
7. *En observant que* $Y(\nu) \in \mathbb{R}$*, montrez que*
$$\Re e(X(\nu)) = \frac{1}{2}X(\nu) + \frac{1}{2}X(\nu)^* = \mathrm{TF}\left[\frac{1}{2}x(t+2) + \frac{1}{2}x(t)\right](\nu)$$
où * *signifie le complexe conjugué.*
8. *Montrez que* $x(t+2) = x(-t)$
9. *Représentez le graphe de* $t \mapsto \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t+2)$
10. *On pose* $x_a(t) = 2\mathbf{1}_{[-1,3]}(t)$ *et* $x_c(t) = (1-|t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$*. En utilisant une construction graphique, montrez que*
$$x(t) = x_a(t) - x_c(t-1)$$

Exercice 10. *(exTS7) On considère les signaux* $x(t)$*,* $y(t)$ *et* $z(t)$*, leur transformée de Fourier est notée* $X(\nu)$*,* $Y(\nu)$*,* $Z(\nu)$*.*

- $x(t) = e^{-2\pi t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$
$$X(\nu) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+i\nu}$$
Son module et son argument sont représentés dans l'exercice 7.
- $y(t) = e^{-2\pi|t|}$
- $z(t) = e^{-|t|}$

1. *Exprimez* $y(t)$ *en fonction de* $x(t)$ *et* $x(-t)$.
2. *Montrez que* $Y(\nu) = 2\Re e(X(\nu))$
3. *Exprimez* $z(t)$ *en fonction de* $y(t)$

4. *Exprimez $Z(\nu)$ en fonction de $Y(\nu)$.*
5. *Représentez $|Z(\nu)|$ et $\arg(Z(\nu))$.*

Exercice 11. (exTS8) *On définit $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)$. On considère deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ définis par*

$$x_1(t) = t\Pi\left(\frac{t}{2}\right) \text{ et } x_2(t) = \frac{d}{dt}x_1(t)$$

À partir de la représentation graphique de $t\Pi(t)$ obtenue avec l'exercice 4, représentez graphiquement $x_1(t)$.

Exercice 12. (exTS9) *On considère $x_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ et $x_2(t) = x_1(t-1)$*

1. *Représentez $x_2(t)$*
2. *Calculez $X_2(0)$*

Exercice 13. (exTS10) *On considère $x_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$*

1. *Représentez $x_3(t) = x_1(t-1) + x_1(-1-t)$*
2. *Exprimez $x_3(t)$ en fonction de $x_2(t) = x_1(t-1)$*
3. *Représentez $x_4(t) = x_1(t+1) + x_1(1-t)$*
4. *Représentez $x_5(t) = x_1(t+1) - x_1(1-t)$*
5. *Quels sont les signaux pairs et impairs ?*

Exercice 14. (exTS11) *On définit $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]}(t)$ et $\mathrm{signe}(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) - \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(t)$ Représentez graphiquement*

$$x_1(t) = \sqrt{|t|}\Pi\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{|t|}}\left(1 - \Pi\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

Exercice 15. (exTS12) *On considère $x(t) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ et $y(t) = x(2t+3)$.*

1. *Trouvez t_0 tel que $y(t)$ soit symétrique par rapport à t_0.*
2. *Montrez qu'on a alors pour $t \in \mathbb{R}$,*

$$y(t_0 + t) = y(t_0 - t)$$

Exercice 16. (exTS13) *On considère les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, leur transformées de Fourier sont notées $X_1(\nu)$ et $X_2(\nu)$.*

$$x_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t), \quad X_1(\nu) = \frac{1}{1+2i\pi\nu} \text{ et } x_2(t) = x_1(t-1) + x_1(-1-t)$$

1. *Calculez $X_2(\nu)$*
2. *Représentez $|X_2(\nu)|$*

Exercice 17. (exTS14) *On considère un signal défini par*

$$x(t) = (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$$

1. *Représentez graphiquement ce signal.*
2. *On considère un signal $y(t)$ et $z(t)$*

$$y(t) = (1 - |t-1|)\,\mathbf{1}_{[0,2]}(t) \text{ et } z(t) = y(t) + 2y(t-1) + y(t-2)$$

   Montrez que $z(t)$ est symétrique par rapport à $t = 2$.
3. *Vérifiez que $z(2+t) = z(2-t)$.*
4. *Représentez graphiquement $z(t)$.*

Exercice 18. *(exTS76) On définit un signal $x(t)$ déjà étudié dans les exercices 1, 9 et 45 (p. 1, p. 3, p. 11) par*

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad t \leq -1 \\ 2 & \textit{si} \quad t \in [-1, 0[\\ 2-t & \textit{si} \quad t \in [0, 1[\\ t & \textit{si} \quad t \in [1, 2[\\ 2 & \textit{si} \quad t \in [2, 3[\\ 0 & \textit{si} \quad t \geq 3 \end{cases}$$

On s'intéresse au calcul de $X(\nu)$. On pose $x_b(t) = t\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ et $X_b(\nu) = \mathrm{TF}\left[x_b(t)\right](\nu)$, et dans l'exercice 46, il sera montré que

$$X_b(\nu) = \frac{(1+2i\pi\nu)e^{-2i\pi\nu} - 1}{4\pi^2\nu^2}$$

1. *On pose $x_a(t) = 2\mathbf{1}_{[-1,3]}(t)$ et $X_a(\nu) = \mathrm{TF}\left[x_a(t)\right](\nu)$. Sachant que*

$$\mathrm{TF}\left[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)\right](\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$$

   montrez que

$$X_a(\nu) = 2\frac{\sin(4\pi\nu)}{\pi\nu}e^{-2i\pi\nu}$$

2. *Montrez que*

$$\mathrm{TF}[x(-t)](\nu) = \mathrm{TF}[x(t)](-\nu)$$

   et que

$$\mathrm{TF}[x(1-t)](\nu) = e^{-2i\pi\nu}\,\mathrm{TF}[x(t)](-\nu)$$

3. *On pose $x_c(t) = (1-|t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ et $X_c(\nu) = \mathrm{TF}\left[x_c(t)\right](\nu)$. Montrez en utilisant une construction graphique que*

$$x_c(t) = x_b(1+t) + x_b(1-t)$$

4. *Montrez que*

$$X_c(\nu) = X_b(\nu)e^{2i\pi\nu} + X_b(-\nu)e^{-2i\pi\nu}$$

5. *Montrez que*

$$X_c(\nu) = \frac{\sin^2(\pi\nu)}{\pi^2\nu^2}$$

6. *Lors de l'exercice 9, il a été montré que*

$$x(t) = x_a(t) - x_c(t-1)$$

   Montrez alors que

$$X(\nu) = \left(2\frac{\sin(4\pi\nu)}{\pi\nu} - \frac{\sin^2(\pi\nu)}{\pi^2\nu^2}\right)e^{-2i\pi\nu}$$

Exercice 19. (exTS80) *On considère un signal $z(t)$ défini par*

$$z(t) = \int_{t-1}^{t+1} e^{-|\tau|}\, d\tau$$

1. *On suppose ici que $t \geq 1$. En utilisant la décroissance de $t \mapsto e^{-t}$ et le fait que $e^{-\tau} \leq e^{-(\tau-1)}$ pour $\tau \in [t-1, t+1]$, montrez que pour $t \geq 1$,*

$$|z(t)| \leq 2e\, e^{-t}$$

En déduire que $\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$.

2. *Montrez que $z(t)$ est un signal pair.*
3. *Montrez que*

$$\frac{d}{dt} z(t) = e^{-|t+1|} - e^{-|t-1|}$$

4. *Montrez que $z(t)$ est décroissante pour $t > 0$.*
5. *Montrez que $z(t)$ a une tangente horizontale en $t = 0$, et une tangente à gauche et à droite de $t = 1$ identiques.*
6. *Représentez graphiquement $z(t)$.*

3 Signaux dépendant d'un second paramètre, descripteurs, transformée de Fourier de signaux exponentiels

3.1 Exercices

Exercice 20. (exTS68) *On considère le signal $x_1(t)$ et sa transformée de Fourier notée $X_1(\nu)$.*

$$x_1(t) = e^{-t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

Montrez que $X_1(\nu) = \frac{1}{1+2i\pi\nu}$

Exercice 21. (exTS15) *On considère $x_\alpha(t) = \sqrt{e}\, t\, e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle ici*

$$t_{\max} = \arg\max_{t\in\mathbb{R}} x_\alpha(t) \text{ et } t_{\min} = \arg\min_{t\in\mathbb{R}} x_\alpha(t)$$

Calculez $t_{\max}$ et $t_{\min}$.

Exercice 22. (exTS16) *On considère pour $a > 0$, un signal impair et un signal pair définis par*

$$x_a(t) = te^{-at^2} \text{ et } y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

1. *Montrez que*

$$t_a^{\max} = \operatorname*{argmax}_{t\in\mathbb{R}} x_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

2. *Montrez qu'il existe $t^{(1/2)}$ défini par*

$$y(t^{(1/2)}) = \frac{1}{2} \max_t y(t)$$

3. *Puis montrez que $t^{(1/2)} = \sqrt{2\ln(2)}$.*

Exercice 23. (exTS17) *On considère le signal $x(t) = e^{-\pi t^2}$ dont la transformée de Fourier est $X(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$.*

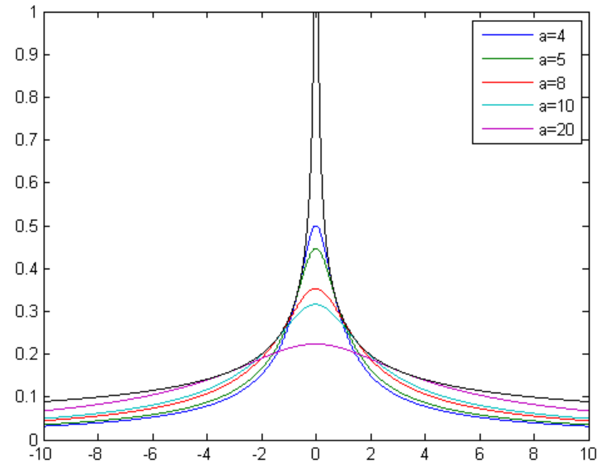

FIGURE 1 – $X_a(\nu)$ en fonction de ν pour différentes valeurs de a. Exercice 25

1. *On définit la largeur à mi-hauteur du spectre*

$$\Delta\nu_x = \nu_2 - \nu_1 \textit{ où } |X(\nu_2)| = |X(\nu_1)| = \frac{1}{2}\max_\nu |X(\nu)|$$

   Montrez que $\Delta\nu_x = 2\sqrt{\frac{\ln(2)}{\pi}}$

2. *On définit la largeur à mi-hauteur de la densité spectrale*

$$\Delta\nu_0 = \nu_2 - \nu_1 \textit{ où } |X(\nu_2)|^2 = |X(\nu_1)|^2 = \frac{1}{2}\max_\nu |X(\nu)|^2$$

   Montrez que $\Delta\nu_o = 2\sqrt{\frac{2\ln(2)}{\pi}}$

3. *On définit la largeur à mi-hauteur de la puissance instantanée*

$$\Delta t_0 = t_2 - t_1 \textit{ où } |x(t_2)|^2 = |x(t_1)|^2 = \frac{1}{2}\max_t |x(t)|^2$$

   Montrez que $\Delta\nu_o\Delta t_0 = \frac{2\ln(2)}{\pi}$

4. *On définit* $\Delta\omega_0 = 2\pi\Delta\nu_0$*, calculez* $\Delta\omega_0\Delta t_0$.

Exercice 24. *(exTS18) On considère le signal* $x(t) = e^{-|t|}$ *pour* $t \in \mathbb{R}$.

1. *Montrez que* $X(\nu) = \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$ *est sa transformée de Fourier.*
2. *En déduire la valeur de* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2\nu^2}\,d\nu$

Exercice 25. *(exTS19) On considère deux paramètres fixes et différents notés* a, b *avec* $a \neq b$ *et* $a > 0$, $b > 0$. *On considère deux signaux.*

$$x_a(t) = \sqrt{a}e^{-ta}\mathbb{H}(t) \textit{ et } x_b(t) = \sqrt{b}e^{-tb}\mathbb{H}(t)$$

avec $\mathbb{H}(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

1. *Calculez les modules des transformée de Fourier de* $x_a(t)$ *et* $x_b(t)$.

$$|X_a(\nu)| = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2+4\pi^2\nu^2}} \textit{ et } |X_b(\nu)| = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b^2+4\pi^2\nu^2}}$$

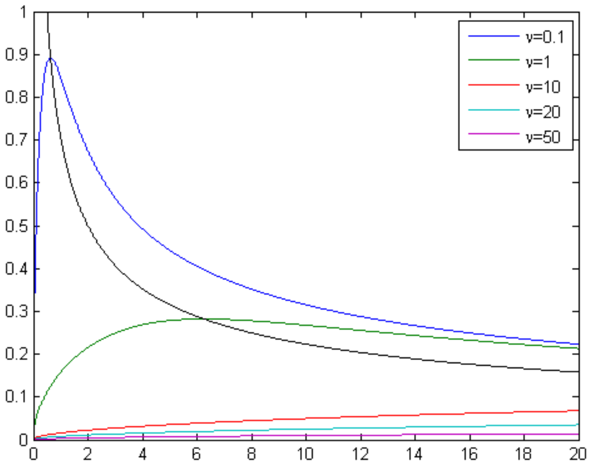

FIGURE 2 – $X_a(\nu)$ en fonction de a pour différentes valeurs de ν. Exercice 25

2. *Représentez $|X_a(\nu)|$ en fonction de ν pour différentes valeurs de a et représentez $|X_a(\nu)|$ en fonction de a pour différentes valeurs de ν. On admet ici que la dérivée partielle de $|X_a(\nu)|$ en fonction de a est égale à*

$$\frac{\partial}{\partial a}|X_a(\nu)| = \frac{4\pi^2\nu^2 - a^2}{2\sqrt{a}\,(a^2+4\pi^2\nu^2)^{\frac{3}{2}}}$$

   (a) *Montrez que $|X_a(\nu)|$ est paire vis-à-vis de ν.*
   (b) *Montrez que $|X_a(\nu)|$ est décroissante pour $\nu > 0$.*
   (c) *Montrez que $|X_a(\nu)|$ est croissante vis-à-vis de a pour $a < 2\pi|\nu|$ et décroissante pour $a > 2\pi|\nu|$.*
   (d) *La courbe en noire de la figure 1 représente $|X_{2\pi|\nu|}(\nu)|$, expliquez pourquoi on observe que lorsqu'on augmente a avec $a' > a$, la courbe $X_{a'}(\nu)$ est au dessus pour la partie à gauche de cette courbe noire et en dessous pour la partie à droite de cette courbe.*
   (e) *La courbe en noire de la figure 2 représente $|X_a\left(\frac{a}{2\pi}\right)|$, expliquez pourquoi les points de cette courbe sont des maximas des courbes $X_a(\nu)$ à ν fixé.*

Exercice 26. (exTS70) *On considère $x_\alpha(t) = \sqrt{e}\,t\,e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère maintenant $x_a(t) = te^{-at^2}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$.*

1. *Montrez que $x_\alpha(t)$ est impair.*
2. *Qu'en-est-il de la parité de $x_a(t)$?*

Exercice 27. (exTS72) *On considère pour $a > 0$, un signal défini par*

$$x_a(t) = te^{-at^2}$$

En utilisant les exercices 26 et 29, représentez graphiquement $x_a(t)$

Exercice 28. (exTS79)

$$y_2(t) = [(b-a) - |t-a-b|]\,\mathbf{1}_{[2a,2b]}(t)$$

Montrez que $y_2(t)$ est symétrique par rapport à $t = a + b$.

Exercice 29. (exTS71) *On considère $x_\alpha(t) = \sqrt{e}\,t\,e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Calculez la dérivée et donnez le tableau de variation de $x_\alpha(t)$.*
2. *Tracez la courbe représentative de $x_\alpha(t)$.*

4 Signaux gaussiens, techniques de calcul, puissance et énergie de signaux non-périodiques, intégration par partie

4.1 Exercices

Exercice 30. (exTS73) *On considère un signal défini par*

$$y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Représentez graphiquement $y\left(\frac{t}{2}\right)$

Exercice 31. (exTS21) *Ce signal est une succession de segments joignant les instants* $t = 0, 1, 3$ *:* $x(0) = 0$, $x(2) = 1$, $x(3) = 0$. *Ce signal est nul pour* $t \leq 0$ *et pour* $t \geq 3$. *Ce signal a déjà été étudié lors de l'exercice 2 (p. 2). Calculez l'énergie* E_x.

Exercice 32. (exTS22) *Calculez l'énergie du signal* $x(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$

Exercice 33. (exTS23) *On définit* $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)$. *On considère deux signaux* $x_1(t)$ *et* $x_2(t)$ *définis par*

$$x_1(t) = t\Pi\left(\frac{t}{2}\right) \text{ et } x_2(t) = \frac{d}{dt}x_1(t)$$

Ces signaux $x_1(t)$ *et* $x_2(t)$ *ont été étudiés dans l'exercice 11 (p. 4). Calculez* E_{x_1} *et* E_{x_2}

Exercice 34. (exTS24) *On considère* $x_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ *et* $x_2(t) = x_1(t-1)$, *déjà étudiés dans l'exercice 12 (p. 4). Calculez l'énergie de* $x_2(t)$ *notée* E_{x_2}.

Exercice 35. (exTS25) *On suppose avoir déjà calculé que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$$

1. *Montrez que la fontion* $z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$ *est une fonction holomorphe sauf en* $z = i$ *ou* $z = -i$.
2. *Montrez que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+(t+\frac{i}{2})^2} = \pi$$

Exercice 36. (exTS74) *On considère* $x(t) = e^{-\pi t^2}$. *On sait que pour tout* $\sigma > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt = \sqrt{2\pi}\sigma$$

Montrez que l'énergie $E_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 37. (exTS27) *On considère* $x_\alpha(t) = \sqrt{e}te^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$. *On remarque aussi qu'une primitive de* $te^{-2\frac{t^2}{\alpha^2}}$ *est* $-\frac{\alpha^2}{4}e^{-2\frac{t^2}{\alpha^2}}$. *En utilisant une intégration par partie, montrez que*

$$E_{x_\alpha} = \frac{e\alpha^3\sqrt{2\pi}}{8}$$

Exercice 38. (exTS28) *On considère le signal* $x(t) = e^{-\pi t^2}$ *pour* $t \in \mathbb{R}$, *et on veut calculer sa transformée de Fourier notée* $X(\nu)$.

1. *Montrez que*

$$X(\nu) = e^{-\pi\nu^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2(t+i\nu)^2}\, dt$$

2. *Montrez que*

$$X(\nu) = e^{-\pi\nu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 t^2}\, dt$$

3. *Sachant que pour tout $\sigma > 0$,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}\, dt = \sqrt{2\pi}\sigma$$

montrez que $X(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$.

Exercice 39. $_{(exTS29)}$ *On considère un signal $x(t)$ dont l'énergie E_x est finie. Montrez qu'alors*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt = 0$$

Cette expression est ce qu'on appelle la puissance.

Exercice 40. $_{(exTS30)}$ *On considère le signal $x(t) = \mathbb{H}(t)e^{-2\pi t}$ avec $\mathbb{H}(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.*

1. *Montrez que $X(\nu) = \frac{1}{1+i\nu}\frac{1}{2\pi}$.*
2. *En utilisant $x(t)$, montrez que $E_x = \frac{1}{4\pi}$.*
3. *En utilisant $X(\nu)$, montrez que*

$$E_x = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{1+\nu^2}$$

4. *Déduisez que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$$

Exercice 41. $_{(exTS31)}$ *On considère deux paramètres fixes et différents notés a, b avec $a \neq b$ et $a > 0$, $b > 0$. On considère deux signaux.*

$$x_a(t) = \sqrt{a}e^{-ta}\mathbb{H}(t) \text{ et } x_b(t) = \sqrt{b}e^{-tb}\mathbb{H}(t)$$

avec $\mathbb{H}(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

Montrez que $x_a(t)$ et $x_b(t)$ ont la même énergie

$$E_{x_a} = E_{x_b} = 2$$

Exercice 42. $_{(exTS32)}$ *On considère $x(t) = e^{-\alpha t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ avec $\alpha > 0$. Calculez E_x à partir de $x(t)$ et montrez que $E_x = \frac{1}{2\alpha}$.*

Exercice 43. $_{(exTS75)}$

On définit un signal $x(t)$ déjà étudié dans l'exercice 1 et 9 (p. 1, p. 3) par

$$x(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq -1 \\ 2 & si \quad t \in [-1, 0[\\ 2-t & si \quad t \in [0, 1[\\ t & si \quad t \in [1, 2[\\ 2 & si \quad t \in [2, 3[\\ 0 & si \quad t \geq 3 \end{cases}$$

Calculez son énergie E_x et montrez que $E_x = 12 + \frac{2}{3}$.

5 Signaux périodiques, sinus cardinaux et transformées de Fourier de fonctions portes, propriétés de la transformée de Fourier, relations trigonométriques, distribution Dirac

5.1 Exercices

Exercice 44. $_{(exTS20)}$ *On considère $\alpha \in [0,1[$ et un signal $x_\alpha(t)$ défini par*

- *$x_\alpha(t)$ est périodique de période 1*
- *Pour $t \in [0,\alpha[$, $x_\alpha(t) = 1$*
- *Pour $t \in [\alpha,1[$, $x_\alpha(t) = 0$*

On considère $y_\alpha(t) = x_\alpha(t-\frac{1}{2})$.

1. *Tracez les graphes de $x_\alpha(t)$ et $y_\alpha(t)$ pour $t \in [-2,2]$ en séparant les cas $\alpha \leq \frac{1}{2}$ et $\alpha > \frac{1}{2}$.*
2. *Tracez les graphes de $x_\alpha(0)$ et $y_\alpha(\frac{1}{2})$ pour $\alpha \in [0,1[$.*
3. *Tracez les graphes de $x_\alpha(\frac{1}{2})$ et $y_\alpha(0)$ pour $\alpha \in [0,1[$.*
4. *Montrez que*
   - *si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}]}(t)$ pour $t \in [0,1]$*
   - *si $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[0,\alpha-\frac{1}{2}]}(t) + \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}(t)$ pour $t \in [0,1]$*

Exercice 45. $_{(exTS33)}$

On définit un signal $x(t)$ déjà étudié dans l'exercice 1 et 9 (p. 1, p. 3) par

$$x(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq -1 \\ 2 & si \quad t \in [-1,0[\\ 2-t & si \quad t \in [0,1[\\ t & si \quad t \in [1,2[\\ 2 & si \quad t \in [2,3[\\ 0 & si \quad t \geq 3 \end{cases}$$

1. *En observant que $x(0) = 2$, montrez que*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, d\nu = 2$$
2. *En s'inspirant de l'exercice 43 (p. 10), montrez que*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \, d\nu = 12 + \frac{2}{3}$$
3. *En s'inspirant de l'exercice 9, représentez graphiquement $\mathrm{TF}^{-1}\left[\Re e(X(\nu)\right](t)$*

Exercice 46. $_{(exTS36)}$ *On définit un signal $x(t)$ déjà étudié dans les exercices 1, 9, 18 et 45 (p. 1, p. 3, p. 5, p. 11) par*

$$x(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq -1 \\ 2 & si \quad t \in [-1,0[\\ 2-t & si \quad t \in [0,1[\\ t & si \quad t \in [1,2[\\ 2 & si \quad t \in [2,3[\\ 0 & si \quad t \geq 3 \end{cases}$$

Dans l'exercice 18 montrant le calcul de $X(\nu)$, il manquait une étape. On pose $x_b(t) = t\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ et $X_b(\nu) = \text{TF}\left[x_b(t)\right](\nu)$, montrez que

$$X_b(\nu) = \frac{(1+2i\pi\nu)e^{-2i\pi\nu}-1}{4\pi^2\nu^2}$$

Exercice 47. (exTS82) *On définit $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]}(t)$. Calculez et représentez graphiquement $\frac{d}{dt}(t\Pi(t))$*

Exercice 48. (exTS83) *On définit $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)$. On considère deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ définis par*

$$x_1(t) = t\Pi\left(\frac{t}{2}\right) \text{ et } x_2(t) = \frac{d}{dt}x_1(t)$$

Sa représentation graphique a été étudiée dans l'exercice 11 (p. 4).

1. *Représentez graphiquement $x_2(t)$.*
2. *Calculez $X_1(0)$ et $X_2(0)$*

Exercice 49. (exTS84) *On définit $\Pi(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]}(t)$ et $\text{signe}(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) - \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(t)$ On considère un signal $x_1(t)$*

$$x_1(t) = \sqrt{|t|}\Pi\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{|t|}}\left(1-\Pi\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

Sa représentation graphique a déjà été étudiée dans l'exercice 14 (p. 4). On considère $x_2(t) = \frac{d}{dt}x_1(t)$.

1. *Représentez graphiquement $x_2(t)$.*
2. *Exprimez x_2 en fonction de Π et* signe.

6 Signaux à valeurs complexes, approximation, temps moyen

6.1 Exercices

Exercice 50. (exTS38) *On considère un ensemble de signaux $x_n(t) = (it)^n\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Leurs transformées de Fourier sont notées $X_n(\nu)$.*

1. *Calculez $X_n(0)$ et montrez que*

$$X_n(0) = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & si \quad n = 4k \\ 0 & si \quad n = 4k+1 \\ -\frac{2}{n+1} & si \quad n = 4k+2 \\ 0 & si \quad n = 4k+3 \end{cases}$$

2. *Calculez le temps moyen de x_n*

$$< t_n >= \frac{1}{I_n}\int_{-\infty}^{+\infty} t|x_n(t)|\,dt \text{ et } I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_n(t)|\,dt$$

et montrez que $< t_n >= 0$.

3. *Calculez l'énergie et la puissance de x_n et montrez que $E_{x_n} = \frac{2}{2n+1}$ et $P_{x_n} = 0$.*

Exercice 51. (exTS40) *On considère $e_1(t)$, $e_2(t)$ et $x(t)$ des signaux périodiques de période 1.*

$$\text{Pour } t \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[, \quad \begin{cases} e_1(t) &=& 1 \\ e_2(t) &=& \text{signe}(t) \\ x(t) &=& t\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(t) \end{cases}$$

1. *Montrez que* $e_1(t)$ *et* $e_2(t)$ *sont orthogonaux pour la puissance.*
2. *Montrez que* $e_1(t)$ *et* $e_2(t)$ *sont de norme* 1 *pour la puissance.*
3. *Trouvez* α *et* β *tels que* $\widehat{x}(t)$ *approche le mieux* $x(t)$ *sachant que*

$$\widehat{x}(t) = \alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$$

   Montrez que $\alpha = \frac{1}{8}$ *et* $\beta = \frac{1}{8}$.
4. *Représentez graphiquement* $x(t)$, $\widehat{x}(t)$, $e_1(t)$ *et* $e_2(t)$.

Exercice 52. (exTS26) *On considère* $x(t) = e^{-\pi t^2} e^{it}$. *Montrez en vous inspirant de l'exercice 36 (p. 9) que l'énergie* $E_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 53. (exTS35) *On considère le signal* $x(t) = e^{-\pi t^2}\cos(t)$ *Il est souhaitable d'utiliser l'exercice 52 (p. 13). Vous pouvez aussi utiliser le fait que* $\cos^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Re e(e^{2it})$. *Montrez que l'énergie est* $E_x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 + e^{-\frac{1}{2\pi}}\right)$.

Exercice 54. (exTS37) *On considère le signal*

$$x(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2} e^{i\omega_0 t}$$

avec $\alpha > 0$ *et* $\omega_0 \in \mathbb{R}$. *Par ailleurs on sait que pour* $x_r(t) = e^{-\pi t^2}$, $X_r(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$.

1. *On définit* $x_1(t) = x_r(t)\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$. *Montrez que* $X_1(\nu) = X_r(\nu)\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$.
2. *On définit* $x_2(t) = x_1(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}t)$. *Montrez que* $X_2(\nu) = e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\nu^2}$.
3. *On définit* $x_3(t) = x_2(t)e^{i\omega_0 t}$, *montrez que*

$$X(\nu) = e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\left(\nu - \frac{\omega_0}{2\pi}\right)^2}$$

Exercice 55. (exTS39) *On considère un signal complexe* $y(t) = \frac{1}{t+i}$ *pour* $t \in \mathbb{R}$. *On cherche un spectre de la forme* $Y(\nu) = ae^{-b\nu}\mathbb{H}(\nu)$ *où* $\mathbb{H}(\nu) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\nu)$.

1. *En utilisant la valeur* $y(0) = \frac{1}{i}$, *montrez que* $\frac{a}{b} = \frac{1}{i}$.
2. *Sachant que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \pi$$

   montrez en calculant E_y *que*

$$\frac{|a|^2}{2\Re e(b)} = \pi$$

   On peut en effet remarquer que

$$e^{-b\nu} = e^{-\Re e(b)\nu} e^{-\operatorname{Im}(b)\nu}$$

3. *On suppose maintenant que* $\operatorname{Im}(b) = 0$. *Montrez que les deux conditions précédentes,* $\frac{a}{b} = \frac{1}{i}$ *et* $\frac{|a|^2}{2\Re e(b)} = \pi$ *entraînent que*

$$Y(\nu) = \mathbb{H}(\nu)e^{-2\pi\nu}(-2i\pi)$$

   En appliquant la transformée de Fourier inverse à $Y(\nu)$, *montrez qu'on retrouve* $y(t)$.

7 Puissance et énergie d'un signal périodique, valeur moyenne d'un signal périodique, coefficients de la série de Fourier, valeur à gauche et à droite, parité, représentation

7.1 Exercices

Exercice 56. *(exTS34)* *On considère les signaux suivants*

$$x_1(t) = \sin(t\sqrt{2}) \quad x_2(t) = \operatorname{sinc}(t\sqrt{2}) \quad x_3 = (x_1(t))^2$$

1. *Représentez graphiquement* $x_1(t)$
2. *Représentez graphiquement* $x_2(t)$
3. *Représentez graphiquement* $x_3(t)$ *en exprimant* $x_3(t)$ *en fonction de* $\cos(2\sqrt{2}t)$

Exercice 57. *(exTS41)* *On considère les signaux* $e_1(t)$*,* $e_2(t)$*,* $x(t)$*,* $\widehat{x}(t)$ *définis lors de l'exercice 51 (p. 12). Représentez graphiquement ces signaux.*

Exercice 58. *(exTS45)* *On considère le signal* $x(t)$ *périodique de période* 2 *et défini par*

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \text{ pour } t \in [0, 2[$$

1. *Représentez le signal* $x(t)$
2. *Montrez que*

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} x(t) + \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^-} x(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-1})$$

Exercice 59. *(exTS43)* *On considère un signal périodique de période* 2*, noté* $x(t)$ *et défini par*

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \text{ pour } t \in [0, 2[$$

On note X_k *les coefficients de la série de Fourier qui sont calculés dans l'exercice 67 (p. 16).*

$$X_k = \frac{1 - e^{-1}}{1 + 2i\pi k}$$

1. *Calculez sa puissance* P_x *et son énergie* E_x*. Montrez que*

$$P_x = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$$

2. *À quelles fréquences sont associées les coefficients de la série de Fourier* X_k *?*
3. *Montrez que*

$$P_x = (1 - e^{-1})^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 k^2}$$

4. *Montrez alors que*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 k^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{3 - e}{e - 1}\right)$$

Exercice 60. *(exTS44)* *On considère* $x(t)$ *périodique de période* 2 *défini par* $x(t) = e^{-\frac{t}{2}}$ *pour* $t \in [0, 2[$*. Les coefficients de la série de Fourier sont* $X_k = \frac{1-e^{-1}}{1+2i\pi k}$

1. *Montrez que*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{-1}}{1+2i\pi k}(-1)^k = e^{-1/2}$$

2. *Montrez que*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+4i\pi^2 k^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{e-1}\right)$$

3. *Représentez graphiquement le module et l'argument de la transformée de Fourier.*

Exercice 61. *(exTS42) On considère $\alpha = \frac{2}{3}$ et $x_\alpha(t)$ un signal périodique de période 1 défini par $x_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}]}(t)$ pour $t \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. On considère $y(t) = 1+\cos(2\pi t)$. Représentez graphiquement $x(t)$ et $y(t)$.*

Exercice 62. *(exTS46) On considère $\alpha \in [0,1[$ et un signal $x_\alpha(t)$ défini par*
- *$x_\alpha(t)$ est périodique de période 1*
- *Pour $t \in [0,\alpha]$, $x_\alpha(t) = 1$*
- *Pour $t \in]\alpha,1]$, $x_\alpha(t) = 0$*
- *$X_{\alpha,k}$ sont les coefficients de Fourier de $x_\alpha(t)$.*

1. *Calculez la puissance de $x_\alpha(t)$ et montrez que*

$$P_{x_\alpha} = \alpha$$

2. *On considère un signal $y_\alpha(t)$ périodique de période 1, dont les coefficients de Fourier $Y_{\alpha,k}$ vérifient*

$$Y_{\alpha,k} = (-1)^k X_{\alpha,k}$$

Calculez la puissance du signal $y_\alpha(t)$ et montrez que

$$P_{y_\alpha} = P_{x_\alpha}$$

Exercice 63. *(exTS78) On considère un singal $x_\alpha(t)$ périodique de période 1 défini par*

$$x_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}]}(t) \text{ pour } t \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$$

On considère une sinusoïde surélevée définie par

$$y(t) = 1+\cos(2\pi t)$$

1. *À quelle fréquences correspondent les coefficients X_k de la série de Fourier ?*
2. *Sachant que x_α est paire, que sait-on sur X_k ?*
3. *Quelle est la valeur moyenne de $x_\alpha(t)$, qu'est-ce que cela nous apprend sur X_0 ?*
4. *Calculez la puisssance P_x.*
5. *Montrez pour $y(t)$, la relation entre la puissance P_y et la valeur moyenne $< y(t) >$ est*

$$P_y = \frac{3}{2} < y(t) >^2$$

6. *Montrez que pour $\alpha = \frac{2}{3}$, on a aussi*

$$P_x = \frac{3}{2} < x(t) >^2$$

7. *On considère le signal approchant* $x(t)$.

$$\widehat{x}(t) = X_0 + X_1 e^{-2i\pi t} + X_{-1} e^{2i\pi t}$$

   avec X_0 *calculé lors de la question* 3 *et* $X_k = \alpha \operatorname{sinc}(\pi k \alpha)$ *pour* $k \neq 0$.
8. *Calculez* $\widehat{x}(t)$ *pour* $\alpha = \frac{2}{3}$.
9. *Représentez* $\widehat{x}(t)$.
10. *Calculez la puissance* $P_{\widehat{x}}$.

Exercice 64. *(exTS81) On considère un signal* $y_\alpha(t)$ *obtenu avec l'exercice* 75 *(p.* 20*). Il est ainsi défini.*
— *si* $\alpha \leq \frac{1}{2}$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}]}(t)$ *pour* $t \in [0,1]$
— *si* $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, $y_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[0,\alpha-\frac{1}{2}]}(t) + \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}(t)$ *pour* $t \in [0,1]$
Montrez que

$$Y_{\alpha,0} = \alpha \text{ et } P_{y_\alpha} = \alpha$$

Exercice 65. *(exTS77) En reprenant l'exercice* 51 *(p.* 12*), calculez la puissance de* $x(t) - \widehat{x}(t)$ *et montrez que* $P_{x-\widehat{x}} = \frac{1}{128}(1+\frac{7}{6})$

8 Série de Fourier, définition et propriétés, utilisation de la distribution $\delta(\nu)$

8.1 Exercices

Exercice 66. *(exTS47) On considère un singal* $x_\alpha(t)$ *périodique de période* 1 *défini par*

$$x_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}]}(t) \text{ pour } t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$

1. *Calculez* X_k *les coefficients de la série de Fourier associée à* $x(t)$ *et montrez que pour* $k \neq 0$, $X_k = \alpha \operatorname{sinc}(\pi k \alpha)$ *et que* $X_0 = \alpha$.
2. *On approxime* $x(t)$ *par sa composante continue et sa première harmonique. L'approximation est notée* $\widehat{x}(t)$*. Montrez que*

$$\widehat{x}(t) = X_0 + X_1 e^{2i\pi t} + X_{-1} e^{-2i\pi t}$$

Exercice 67. *(exTS48) On considère un signal périodique de période* 2*, noté* $x(t)$ *et défini par*

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \text{ pour } t \in [0, 2[$$

1. *À quelles fréquences sont associées les coefficients de la série de Fourier* X_k *?*
2. *Calculez les coefficients* X_k *et montrez que*

$$X_k = \frac{1-e^{-1}}{1+2i\pi k}$$

Exercice 68. *(exTS49) On considère le signal* $x(t)$ *périodique de période* 2 *et défini par*

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \text{ pour } t \in [0, 2[$$

Ses coefficients de la série de Fourier sont

$$X_k = \frac{1-e^{-1}}{1+2i\pi k}$$

1. *On considère*

$$S_N = \sum_{k=-N}^{N} X_k$$

Montrez que

$$S_K = (1 - e^{-1}) \left[1 + 2\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{1 + 4\pi^2 k^2} \right]$$

2. *Sachant que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{3 - e}{e - 1} \right)$$

montrez que S_K *tend vers* $\frac{1}{2}(1 + e^{-1})$ *quand* $K \to +\infty$.

3. *En utilisant*

$$\frac{1}{2} \lim_{t \to 0^+} x(t) + \frac{1}{2} \lim_{t \to 0^-} x(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-1})$$

qui a été montré dans l'exercice *58 (p. 14)**, donnez deux explications conduisant à cette affirmation.*

$$\lim_{K \to +\infty} S_K = \frac{1}{2} \lim_{t \to 0^+} x(t) + \frac{1}{2} \lim_{t \to 0^-} x(t)$$

— *La première raison est issue du calcul.*
— *La deuxième raison utilise la série de Fourier.*

9 Produit de convolution et distribution de Dirac

9.1 Exercices

Exercice 69. *(exTS50)* *On considère un signal* $x(t)$ *quelconque et un signal* $h(t)$ *défini par*

$$h(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \delta(t) + \left(1 - \frac{b}{a} \right) \sqrt{ab} e^{-bt} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$$

On définit un signal $y(t)$ *par*

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Montrez que

$$y(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} x(t) + \sqrt{ab} \left(1 - \frac{b}{a} \right) e^{-bt} \int_0^t e^{b\tau} x(\tau)\, d\tau$$

lorsque $x(t)$ *est nul pour* $t \leq 0$.

Exercice 70. *(exTS51)* *On considère les signaux suivants :*

$$\begin{cases} x_1(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) \\ y_1(t) = x_1(t) * x_1(t) \\ x_2(t) = \mathbf{1}_{[a,b]}(t) \\ y_2(t) = x_2(t) * x_2(t) \end{cases}$$

1. *Montrez que* $y_1(0) = 1$.
2. *Montrez que* $y_1(t)$ *est nul pour* $|t| \leq 1$.
3. *Montrez que* $y_1(t)$ *est pair.*
4. *Pour* $t \in [0,1]$, *montrez que* $y_1(t) = 1 - t$.
5. *En déduire que*

$$y_1(t) = (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$$

La représentation graphique de ce signal est réalisé dans l'exercice 17 (p. 4).

6. *On pose* $x_3(t) = x_1(\frac{t}{b-a})$ *et* $y_3(t) = x_3(t) * x_3(t)$, *montrez que*

$$y_3(t) = ((b-a) - |t|)\,\mathbf{1}_{[-(b-a),b-a]}(t)$$

7. *Montrez que*

$$x_2(t) = x_3(t - \frac{a+b}{2})$$

8. *Montrez que*

$$y_2(t) = [(b-a) - |t-a-b|]\,\mathbf{1}_{[2a,2b]}(t)$$

Exercice 71. *(exTS52) On considère* $x(t) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ *et* $y(t) = e^{-|t|}$, *on cherche à calculer* $z(t) = x(t) * y(t)$.

1. *Montrez que*

$$z(0) = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

2. *Montrez que*

$$z(1) = 1 - \frac{1}{e^2}$$

3. *Montrez que*

$$z(t) = \int_{t-1}^{t+1} e^{-\tau}\,d\tau$$

L'étude de $z(t)$ *ainsi défini est faite dans l'exercice 19 (p. 6).*

Exercice 72. *(exTS53) On considère les signaux*

$$x(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) \text{ et } y(t) = x(t) + 2x(t-1) + x(t-2)$$

On note $a(t) = x(t) * x(t)$ *et on sait que*

$$a(t) = (1 - |t-1|)\,\mathbf{1}_{[0,2]}(t)$$

On cherche à calculer $z(t) = x(t) * y(t)$.

1. *Montrez que*

$$z(t) = a(t) + 2a(t-1) + a(t-2)$$

L'étude de la symétrie et la représentation graphique de $z(t)$ *est faite dans l'exercice 17 (p. 4).*

10 Filtres, définition et propriétés, utilisation des limites

10.1 Exercices

Exercice 73. *(exTS54) On considère deux paramètres fixes et différents notés a, b avec $a \neq b$ et $a > 0$, $b > 0$. On considère deux signaux.*

$$x_a(t) = \sqrt{a}e^{-ta}\mathbb{H}(t) \text{ et } x_b(t) = \sqrt{b}e^{-tb}\mathbb{H}(t)$$

avec $\mathbb{H}(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

Leurs transformées de Fourier sont notées $X_a(\nu)$ et $X_b(\nu)$.

$$X_a(\nu) = \frac{\sqrt{a}}{a + 2i\pi\nu} \text{ et } X_b(\nu) = \frac{\sqrt{b}}{b + 2i\pi\nu}$$

On considère un filtre linéaire, temps invariant qui transforme $x_a(t)$ en $x_b(t)$. L'énergie de ces signaux a été calculée dans l'exercice 41 (p. 10). Le calcul et la représentation graphique de $X_a(\nu)$ et $X_b(\nu)$ est faite dans l'exercice 25 (p. 7).

1. *Montrez que la réponse fréquentielle du filtre est*

$$H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}}\left(\frac{a + 2i\pi\nu}{b + 2i\pi\nu}\right)$$

2. *Montrez que $|H(\nu)| = 1$ pour une seule fréquence notée ν_0 qui vaut*

$$\nu_0 = \frac{\sqrt{ab}}{2\pi}$$

3. *Montrez que $H(0) = \sqrt{\frac{a}{b}}$ et que*

$$\lim_{\nu \to +\infty} |H(\nu)| = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

4. *Montrez que*

$$|H(\nu)| = \sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{1 - \frac{(b^2 - a^2)}{b^2 + 4\pi^2\nu^2}}$$

5. *Montrez que*
   — *si $a < b$, $\nu \mapsto |H(\nu)|$ est décroissante de $-\infty$ à 0 et croissante de 0 à $+\infty$, le filtre est un passe-haut ;*
   — *si $b < a$, $\nu \mapsto |H(\nu)|$ est croissante de $-\infty$ à 0 et décroissante de 0 à $+\infty$, le filtre est un passe-bas ;*
6. *Représentez graphiquement $|H(\nu)|$ en fonction de ν.*
7. *Montrez que*

$$H(\nu) = \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\left(\frac{a - b}{b + 2i\pi\nu}\right)$$

8. *En observant que $X_b(\nu) = \frac{\sqrt{b}}{b+2i\pi\nu}$, montrez que la réponse impulsionnelle du filtre est*

$$h(t) = \sqrt{\frac{b}{a}}\delta(t) + \left(1 - \frac{b}{a}\right)\sqrt{ab}e^{-bt}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$$

9. *En utilisant l'exercice 69, (p. 17), montrez que la relation entrée-sortie peut s'exprimer ainsi*

$$y(t) = \sqrt{\frac{b}{a}}x(t) + \sqrt{ab}\left(1 - \frac{b}{a}\right)e^{-bt}\int_0^t e^{b\tau}x(\tau)\,d\tau$$

   lorsque $x(t)$ est nul pour $t \leq 0$.

10. *Montrez que si $x(t)=x_a(t)$ alors $y(t)=x_b(t)$.*

Exercice 74. (exTS55) *On considère un filtre dont la relation entréee-sortie est définie par*

$$\frac{d}{dt}y(t)+by(t)=\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{d}{dt}x(t)+\sqrt{ab}x(t)$$

Montrez que la réponse fréquentielle est

$$H(\nu)=\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\frac{a+i2\pi\nu}{b+i2\pi\nu}\right)$$

Exercice 75. (exTS56) *On considère $\alpha\in[0,1[$ et un signal $x_\alpha(t)$ défini par*

— *$x_\alpha(t)$ est périodique de période 1*
— *Pour $t\in[0,\alpha]$, $x_\alpha(t)=1$*
— *Pour $t\in]\alpha,1]$, $x_\alpha(t)=0$*
— *$X_{\alpha,k}$ sont les coefficients de Fourier de $x_\alpha(t)$.*

On considère un signal non-périodique $x'_\alpha(t)=\mathbf{1}_{[0,\alpha]}(t)$ dont la transformée de Fourier est notée $X'_\alpha(\nu)$.

On considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)=\delta(t-\frac{1}{2})$.

— *$y_\alpha(t)$ est la sortie du filtre obtenue lorsqu'en entrée on met $x_\alpha(t)$. Les coefficients de Fourier sont notés $Y_{\alpha,k}$.*
— *$y'_\alpha(t)$ est la sortie du filtre obtenue lorsqu'en entrée on met $x'_\alpha(t)$. Sa transformée de Fourier est notée $Y'_\alpha(\nu)$.*

1. *Montrez que pour $t\in[0,1[$,*

$$\forall t\in[0,1[,\quad x_\alpha(t)=x'_\alpha(t)$$

2. *Montrez que $X_{\alpha,0}=\alpha$*
3. *Calculez la réponse fréquentielle du filtre notée $H(\nu)$ et montrez que*

$$H(\nu)=e^{-i\pi\nu}$$

4. *Montrez que $y_\alpha(t)$ est périodique de période 1.*
5. *Montrez que*

$$Y_{\alpha,k}=(-1)^kX_{\alpha,k}$$

Ceci permet dans l'exercice 62 (p. 15) de trouver les puissances de $x_\alpha(t)$ et de $y_\alpha(t)$.

6. *Montrez que*

$$y'_\alpha(t)=\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}]}(t)$$

7. *Montrez que pour $t\in[0,1[$,*

$$y_\alpha(t)=y'_\alpha(t)+y'_\alpha(t+1)$$

8. *Montrez que $y_\alpha(t)=x_\alpha(t-\frac{1}{2})$. Ceci permet dans l'exercice 44 (p. 11) de réaliser des représentations graphiques de $x_\alpha(t)$ et $y_\alpha(t)$.*
9. *Montrez que*
   — *si $\alpha\leq\frac{1}{2}$, $y_\alpha(t)=\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}]}(t)$ pour $t\in[0,1]$*
   — *si $\alpha\in]\frac{1}{2},1[$, $y_\alpha(t)=\mathbf{1}_{[0,\alpha-\frac{1}{2}]}(t)+\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}(t)$ pour $t\in[0,1]$*
10. *Vérifiez en utilisant cette nouvelle caractérisation de $y_\alpha(t)$ qu'on a bien*

$$Y_{\alpha,0}=\alpha \text{ et } P_{y_\alpha}=\alpha$$

11 Autocorrélation

11.1 Exercices

Exercice 76. *(exTS57) On cherche à calculer l'autocorrélation, $\varphi_{xx}(t)$ pour $x(t) = e^{-\pi t^2}$. On admet ici que*

$$\mathrm{TF}\left[e^{-\pi t^2}\right](\nu) = e^{-\pi\nu^2}$$

1. *Calculez $s_{xx}(\nu) = \mathrm{TF}[\varphi_{xx}(t)]$ et montrez que*

$$S_{xx}(\nu) = e^{-2\pi\nu^2}$$

2. *Montrez que $S_{xx}(\nu) = X(\sqrt{2}\nu)$*
3. *Montrez que*

$$\varphi_{xx}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi t^2}{2}}$$

Exercice 77. *(exTS58) On considère $x(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-\alpha t}$ avec $\alpha > 0$, et $y(t) = x(t) * x(t)$.*

1. *Montrez que*

$$y(t) = \left(\int_0^t x(\tau)x(t-\tau)\,d\tau\right)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

2. *Montrez que*

$$y(t) = te^{-\alpha t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

Exercice 78. *(exTS59) On considère $x(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-\alpha t}$ avec $\alpha > 0$ et $\varphi_{xx}(t)$ son autocorrélation.*

1. *Montrez que $\varphi_{xx}(-t) = \varphi_{xx}(t)^*$, ici * signifiant le conjugué.*
2. *Pour $t \geq 0$, montrez que*

$$\varphi(t) = \int_t^{+\infty} x(\tau)x(\tau - t)^*\,d\tau$$

3. *Montrez que*

$$\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|t|} \text{ pour } t \in \mathbb{R}$$

Exercice 79. *(exTS60) On considère $x(t) = e^{-\alpha t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t)$ avec $\alpha > 0$. L'autocorrélation de ce signal est déjà calculé et vaut*

$$\varphi_{xx}(t) = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|t|}$$

L'exercice 42 (p. 10) a permis de montrer que $E_x = \frac{1}{2\alpha}$. Calculez $\varphi_{xx}(0)$ et observez que ici

$$E_x = \varphi_{xx}(0)$$

Exercice 80. *(exTS61) On considère $x(t) = e^{-\alpha t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ et $\varphi_{xx}(t)$ son autocorrélation.*

1. *Montrez que*

$$\mathrm{TF}\left[x(t)\right](\nu) = \frac{1}{\alpha + 2i\pi\nu}$$

2. *En exprimant* $\mathrm{TF}[\varphi_{xx}(t)](\nu)$ *en fonction de* $X(\nu)$*, montrez que*

$$\varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \, d\nu$$

3. *Avec l'exercice 79 (p. 21), on sait que* $\varphi_{xx}(0) = \frac{1}{2\alpha}$*. À partir de la question précédente et avec* $\alpha = 2\pi$*, montrez que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{1+\nu^2} \, d\nu = \pi$$

Exercice 81. *(exTS62) En utilisant les exercices 77 et 80 (p. 21 et p. 21), montrez que*

$$\mathrm{TF}\left[te^{-\alpha t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\right] = \frac{1}{(\alpha + 2i\pi\nu)^2}$$

12 Distributions et propriétés

12.1 Exercices

Exercice 82. *(exTS63) On note* $H(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$*. On admet que*

$$\mathrm{TF}\left[H(t)\right](\nu) = \frac{1}{2i\pi} \,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{\nu}\right) + \frac{1}{2}\delta(\nu)$$

1. *En utilisant que*

$$\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[}(t) = H(t+\frac{1}{2}) - H(t-\frac{1}{2})$$

qui a été calculé dans l'exercice 5 (p. 2), montrez que

$$\mathrm{TF}\left[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\right] = \mathrm{TF}\left[H(t)\right](\nu) \times 2i\sin(\pi\nu)$$

2. *Montrez que* $\delta(\nu)\sin(\pi\nu) = 0$
3. *Montrez que*

$$\frac{1}{2i\pi}\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{\nu}\right) 2i\sin(\pi\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$$

Exercice 83. *(exTS64) On considère* $x(t) = t\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$*,* $y(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ *et* $z(t) = \delta(t) * x(t)$*. On note* $X(\nu)$*,* $Y(\nu)$ *et* $Z(\nu)$ *les transformées de Fourier de ces trois signaux. On cherche à calculer* $X(\nu)$*, de deux façons différentes. On considère qu'on a déjà calculé*

$$\mathrm{TF}\left[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)\right](\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$$

1. *Montrez que*

$$Y(\nu) = \frac{1-e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$$

2. *En utilisant les expressions de la dérivée d'un quotient de deux fonctions, montrez que*

$$\frac{d}{d\nu}Y(\nu) = \frac{-1}{2i\pi}\left(\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^2}e^{-2i\pi\nu} - \frac{2i\pi}{\nu}e^{-2i\pi\nu}\right)$$

3. *En déduire que*

$$X(\nu) = -\left(\frac{1 - e^{-2i\pi\nu}2i\pi\nu - e^{-2i\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2}\right)$$

4. *Un calcul mathématique utilisant un développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto e^x$ au voisinage de $x = 0$ permet d'affirmer que*

$$\lim_{\nu \to 0} X(\nu) = \frac{1}{2}$$

Retrouvez ce résultat en utilisant explicitement $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt$

5. *Montrez que*

$$z(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) - \delta(t-1)$$

6. *Calculez $Z(\nu)$ et montrez que*

$$Z(\nu) = \frac{1 - e^{-2i\pi\nu}2i\pi\nu - e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$$

7. *Montrez que $Z(\nu) = 2i\pi\nu X(\nu)$*
8. *Déduisez des deux questions précédentes que*

$$X(\nu) = -\left(\frac{1 - e^{-2i\pi\nu}2i\pi\nu - e^{-2i\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2}\right)$$

Exercice 84. $_{(exTS65)}$ *On considère trois signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ définis par*

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) \\ z(t) = x(t) * y(t) \end{cases}$$

Leur transformée de Fourier sont notées $X(\nu)$, $Y(\nu)$, $Z(\nu)$.

1. *Montrez que*

$$x(t) * y(t) = \int_{t-1}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

2. *Montrez que $z(t) = t - \frac{1}{2}$*
3. *Montrez que*

$$X(\nu) = \frac{-1}{2i\pi}\delta'(\nu)$$

4. *Sachant que $\mathrm{TF}\left[\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)\right](\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$, montrez que*

$$Y(\nu) = \frac{1 - e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$$

5. *Pour cette question, on admet d'une part qu'en général pour un signal $f(t)$, on a*

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

D'autre part un calcul mathématique utilisant un développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto e^x$ nous informe que

$$\left.\frac{dY(\nu)}{d\nu}\right|_{\nu=0} = -i\pi \text{ et } Y(0) = 1$$

La première partie de cette équation signifie que la dérivée en $\nu = 0$ de $Y(\nu)$ vaut $-i\pi$. Montrez alors que

$$Z(\nu) = \frac{i}{2\pi}\delta'(\nu) - \frac{1}{2}\delta(\nu)$$

6. *Retrouvez $Z(\nu)$ en utilisant que $z(t) = t - \frac{1}{2}$.*

Exercice 85. *On considère les signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ définis par*

$$\begin{cases} x(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{i}{2\pi}\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{t}\right) \\ z(t) = x(t) * y(t) \end{cases}$$

Leurs transformées de Fourier sont notées $X(\nu)$, $Y(\nu)$ et $Z(\nu)$. On admet ici que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{\tau}\right) f(\tau)\, d\tau = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{-|\epsilon|} \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau + \int_{|\epsilon|}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau \right]$$

1. *Montrez que*

$$z(t) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,1]}(t) - \frac{i}{2\pi} \ln\left|\frac{t}{t-1}\right|$$

2. *Représentez la partie réelle et imaginaire de $z(t)$*
3. *Montrez que*

$$Y(\nu) = -H(\nu) = -\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(\nu)$$

4. *Montrez que $Z(\nu) = 0$ pour $\nu = 0$, représentez $|Z(\nu)|$. On admet ici que $X(\nu) = \frac{1-e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu}$.*