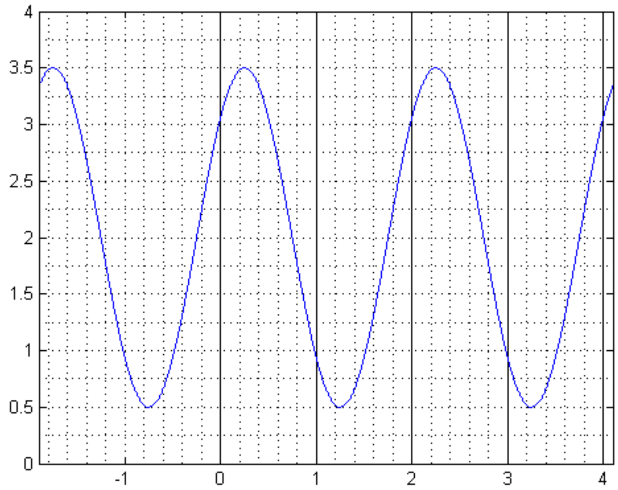

FIGURE 1 – Signal $x(t)$. Exercice 4

Examen théorie du signal (2 heures)
L3SPI

Exercice 1 *On considère un signal* $x_\alpha(t) = \cos(t-\alpha)\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$. *On note son énergie* E_α.

.1. Pour $\alpha = 0$, *calculez l'énergie et montrez que* $E_0 = \frac{\sin(2)}{4} + \frac{1}{2}$.

.2. Montrez que E_α *est périodique de période* π.

On rappelle que $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$.

Solution :

.1. $x_0^2(t) = \cos^2(t)\mathbf{1}_{[0,1]}(t) = \left[\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}\right]\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$.

.2. $|x_{\alpha+\pi}(t)| = \cos(t-\alpha-\pi)\mathbf{1}_{[0,1]}(t) = |x_\alpha(t)|$ Donc $E_{\alpha+\pi} = E_\alpha$

Exercice 2 *On considère un signal* $x(t) = \sqrt{1-t^2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ *et* $y(t) = x(t-1) - x(t-3)$

.1. Montrez que $x(t)$ *est un signal pair et que* $y(t+2)$ *est un signal impair.*

.2. On note E_x *et* E_y *les énergies de* $x(t)$ *et* $y(t)$. *Montrez que* $E_x = 1 + \frac{1}{3}$ *et* $E_y = 2 + \frac{2}{3}$.

.3. Représentez graphiquement $x(t)$ *et* $y(t)$.

Solution :

.1. $x(-t) = x(t)$ et $y(-t+2) = x(-t+2-1) - x(-t+2-3) = x(t-1) - x(t+1) = -x(t+2-1) + x(t+2-3) = -y(t+2)$

.2. $E_x = 2\int_0^1 (1-t^2)\,dt = 2\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$ et $E_y = 2E_x$.

.3. La courbe représentative de $x(t)$ ressemble à $\cos(\frac{\pi t}{2})\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ et celle de $y(t)$ à $\sin(\frac{\pi t}{2})\mathbf{1}_{[0,4]}(t)$.

Exercice 3 *On considère un signal* $x(t) = e^{-\sqrt{\pi}t^2}$. *On cherche à calculer la transformée de Fourier de* $x(t)$ *notée,* $X(\nu)$ *en la fréquence* $\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

$$X\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = \pi^{\frac{1}{4}} e^{-\sqrt{\pi}}$$

.1. Sachant que la transformée de Fourier $e^{-\pi t^2}$ *est* $e^{-\pi\nu^2}$, *démontrez le résultat. Vous pourrez par exemple utiliser* $y(t) = x(\pi^{\frac{1}{4}}t)$.

.2. Une seconde technique consiste d'abord à montrer que

$$X\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\pi}(t^2+2it)}\,dt$$

.3. Montrez ensuite que

$$X\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = e^{-\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\pi}t^2}\,dt$$

.4. En utilisant le fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt = \sqrt{2\pi}\sigma$, *redémontrez le résultat.*

Solution :

.1. $y(t) = x(\pi^{\frac{1}{4}}t) = e^{-\pi t^2}$. Donc $Y(\nu) = e^{-\pi\nu^2} = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}X\left(\frac{\nu}{\pi^{\frac{1}{4}}}\right)$ En particulier

$$X\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = X\left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}\right) = \pi^{\frac{1}{4}}Y\left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}\right) = \pi^{\frac{1}{4}}e^{-\pi\frac{1}{\left(\pi^{\frac{1}{4}}\right)^2}} = \pi^{\frac{1}{4}}e^{-\sqrt{\pi}}$$

.2.

$$X\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\pi}t^2}e^{-i2\pi\frac{1}{\sqrt{\pi}}t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\pi}(t^2+2it)}\,dt$$

.3. On met d'abord sous forme d'un carré le polynôme : $t^2 + 2it = (t+i)^2 + 1$
Ceci montre que

$$X\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = e^{-\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\pi}(t+i)^2}\,dt$$

La fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ étant holomorphe pour tous les complexes, on a

$$X\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = e^{-\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\pi}t^2}\,dt$$

.4. On constate d'abord que $e^{-\sqrt{\pi}t^2} = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ pour $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}\pi^{\frac{1}{4}}}$.
L'application de la formule donnée conduit à

$$X\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = e^{-\sqrt{\pi}}\sqrt{2\pi}\sigma = e^{-\sqrt{\pi}}\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}\pi^{\frac{1}{4}}} = \pi^{\frac{1}{4}}e^{-\sqrt{\pi}}$$

Exercice 4 *La figure 1 représente le signal $x(t)$. Trouvez les valeurs de a, b, c, d tel que*

$$x(t) = a\cos(\pi bt + \pi c) + d$$

Implémentation

```
t=-1.9:1e-3:4.1;
x=1.5*cos(2*pi*0.5*t-pi/4)+2;
figure(1); plot(t,x); axis([-1.9 4.1 0 4]);
grid;
```

Solution :

$$a = 1.5; \quad b = 1; \quad c = -\frac{1}{4}; \quad d = 2;$$

— a est la demi-différence entre le maximum et le minimum.
— Par identification avec $\sin(2\pi f_0 t)$ qui est de période $T = \frac{1}{f_0}$, on en déduit que $b = \frac{2}{T} = \frac{2}{T} = 1$.
— $c = -b\tau$ où τ est 0.25 le retard par rapport à $a\cos(\pi bt) + d$, c'est-à-dire $c = -0.25$.
— d est la demi-somme du maximum et du minimum.