Examen théorie du signal (3 heures)
L3SPI

Nom :
Prénom :
Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Une copie double manuscrite est autorisée.

Exercice 1 *On considère le signal $x(t)$ périodique de période 1 et défini par*

$$x(t) = e^{-t} \text{ pour } t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

.1. Représentez le signal $x(t)$

.2. Montrez que

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} x(t) + \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^-} x(t) = 1$$

.3. On note X_k les coefficients de la série de Fourier de $x(t)$. Montrez que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k = 1$$

Solution :

.1.

.2.

$$\lim_{t\to 0^+} x(t) = e^{-0} = 1 \text{ et } \lim_{t\to 0^-} x(t) = e^{-0} = 1$$

.3. Avec la transformée de Fourier inverse, $x(t)$ s'exprime en fonction de X_k.

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to t_0^+} x(t) + \frac{1}{2}\lim_{t\to t_0^-} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{i2\pi k t_0}$$

Et on applique cette relation à $t_0 = 0$.

Exercice 2 *On considère le signal $x(t) = e^{-\frac{|t|}{2}}$ pour $t \in \mathbb{R}$.*

.1. Montrez que $X(\nu) = \frac{4}{1+16\pi^2\nu^2}$ est sa transformée de Fourier.

.2. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+16\pi^2\nu^2}\, d\nu$

Solution :

.1.

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{t}{2}} e^{-2i\pi\nu t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \frac{1}{\frac{1}{2} - 2i\pi\nu} + \frac{1}{\frac{1}{2} + 2i\pi\nu} = \frac{1}{\frac{1}{4} + 4\pi^2\nu^2}$$

.2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+16\pi^2\nu^2}\, d\nu = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, d\nu = \frac{x(0)}{4} = \frac{1}{4}$$

Exercice 3 *On considère un signal $x(t) = it\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$. Sa transformée de Fourier est notée $X(\nu)$.*

.1. Calculez $X(0)$ et montrez que $X(0) = \frac{i}{2}$.

.2. *Calculez le temps moyen de* x_n

$$< t_x >= \frac{1}{I_x} \int_{-\infty}^{+\infty} t|x(t)|\, dt \ \ et \ I_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt$$

et montrez que $< t_x >= \frac{2}{3}$.

.3. *Calculez l'énergie et la puissance de* x *et montrez que* $E_x = \frac{1}{3}$ *et* $P_x = 0$.

Solution :

.1.

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = \int_0^1 it\, dt = \frac{i}{2}$$

.2. $|x(t)| = t\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ donc

$$I_x = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$$

$t|x(t)| = t^2\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ est impair donc

$$< t_x >= \frac{1}{I_x} \int_0^1 t^2\, dt = \frac{2}{3}$$

.3. $|x(t)|^2 = t^2\mathbf{1}_{0,1]}(t)$ donc

$$E_x = \int_0^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{3}$$

Comme l'énergie est finie, la puissance est nulle

Exercice 4 *On considère trois signaux* $x(t)$, $y(t)$ *et* $z(t)$ *définis par*

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(t) \\ z(t) = x(t) * y(t) \end{cases}$$

Leur transformée de Fourier sont notées $X(\nu)$, $Y(\nu)$, $Z(\nu)$.

.1. *Montrez que*

$$x(t) * y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\tau)\, d\tau$$

.2. *Montrez que* $z(t) = 2t$

.3. *Montrez que*

$$X(\nu) = \frac{-1}{2i\pi}\delta'(\nu)$$

Solution :

.1.

$$z(t) = t*\mathbf{1}_{[-1,1]}(t) = \int_{\Re} x(\tau)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t-\tau)\, d\tau = \int_{\Re} x(\tau)\mathbf{1}_{[t-1,t+1]}(\tau)\, d\tau = \int_{t-1}^{t+1} x(\tau)\, d\tau$$

.2.

$$z(t) = \int_{t-1}^{t+1} \tau\, d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_{t-1}^{t+1} = 2t$$

.3. La transformée de Fourier du signal égal à 1 est un Dirac $\delta(\nu)$.

$$\mathrm{TF}[1] = \mathrm{TF}[\mathrm{TF}^{-1}[\delta(\nu)]] = \delta(\nu)$$

Multipliant par $-2i\pi t$ ce signal, c'est dériver par rapport à ν son spectre.

$$X(\nu) = \mathrm{TF}[t](\nu) = \frac{-1}{2i\pi}\,\mathrm{TF}[-2i\pi t](\nu) = \frac{-1}{2i\pi}\delta'(\nu)$$

Exercice 5 *On considère un signal $x(t)$ périodique de période T_x et de puissance P_x défini par*

$$P_x = \frac{1}{T_x}\int_{-\frac{T_x}{2}}^{\frac{T_x}{2}} |x(t)|^2\,dt$$

. Démontrez qu'alors

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt = P_x$$

Cette expression est aussi ce qu'on appelle la puissance.

À titre d'indication, vous pouvez utilisez le fait que pour $T > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$(n-1)\frac{T_x}{2} \leq T \leq (n+1)\frac{T_x}{2} \tag{1}$$

il suffit en fait de considérer pour n la valeur arrondie de $\frac{2T}{T_x}$. Cette inégalité peut aussi se mettre sous la forme

$$T - \frac{T_x}{2} \leq n\frac{T_x}{2} \leq T + \frac{T_x}{2} \tag{2}$$

Vous pouvez ensuite montrer que

$$P_x\left(1 - 2\frac{T_x}{T}\right) \leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt \leq P_x\left(1 + 2\frac{T_x}{T}\right)$$

Solution : $|x(t)|$ est positif et périodique de période T_x, aussi en utilisant l'équation (1), on a pour tout $T > 0$,

$$\frac{(n-1)P_xT_x}{2T} = \frac{1}{2T}\int_{-(n-1)\frac{T_x}{2}}^{(n-1)\frac{T_x}{2}} |x(t)|^2\,dt \leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt \leq \frac{1}{2T}\int_{-(n+1)\frac{T_x}{2}}^{(n+1)\frac{T_x}{2}} |x(t)|^2\,dt = \frac{(n+1)P_xT_x}{2T}$$

Par ailleurs avec l'équation (2), on a encore que

$$P_x\left(1 - \frac{3T_x}{2T}\right) \leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt \leq P_x\left(1 + \frac{3T_x}{2T}\right)$$

Donc $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt$ tend vers P_x quand T tend vers l'infini.