Examen de traitement numérique du signal

Durée : 1h30

Une copie double manuscrite est autorisée. La calculatrice et le téléphone portable sont interdits.

Pour rappel,

- $\frac{d}{dt}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t) = \delta(t)$

Exercice 1 *On considère un filtre défini par sa relation entrée-sortie :*

$$2\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) - x\left(t - \frac{1}{2}\right) \tag{1}$$

1. *Trouvez sa réponse fréquentielle et montrez que le module de cette réponse fréquentielle est*

$$\left|\widehat{H}(f)\right| = \frac{2\left|\sin(\frac{\pi f}{2})\right|}{\sqrt{1+16\pi^2 f^2}}$$

2. *Représentez graphiquement le module de la réponse fréquentielle sur l'intevalle $f \in [-4, 4]$, en soignant l'échelle des abscisses.*

Solution :

1. Les propriétés de la transformée de Fourier sur le retard montre que

$$\mathbb{TF}\left[x(t - \frac{1}{2})\right](f) = \widehat{X}(f)e^{-j\pi f}$$

La réponse fréquentielle est

$$\widehat{H}(f) = \frac{1 - e^{-j\pi f}}{1 + 4j\pi f}$$

2. La courbe est sur la figure 1. Voici la simulation Matlab permettant d'obtenir la figure.

```
f=-4:1e-3:4;
H=abs((1-exp(-j*pi*f))./(1+4j*pi*f));
H1=2*abs(sin(pi*f/2))./sqrt(1+16*pi^2*f.^2);
figure(1); plot(f,H,f,H1);
```

Exercice 2 *On cherche la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre, $\mathcal{H}$ défini par sa relation entrée-sortie :*

$$2\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) - x\left(t - \frac{1}{2}\right) \tag{2}$$

1. *Trouvez la réponse impulsionnelle $h_1(t)$ du filtre $\mathcal{H}_2$ défini par sa relation entrée-sortie :*

$$2\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t)$$

Montrez que $h_1(t) = e^{-\frac{t}{2}}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

2. *On considère un filtre $\mathcal{H}_2$ défini par sa relation entrée sortie*

$$y(t) = x(t) - x\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

On note $h_2(t)$ sa réponse impulsionnelle. Expliquez comment en associant $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, on retrouve le filtre $\mathcal{H}$. Montrez que

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

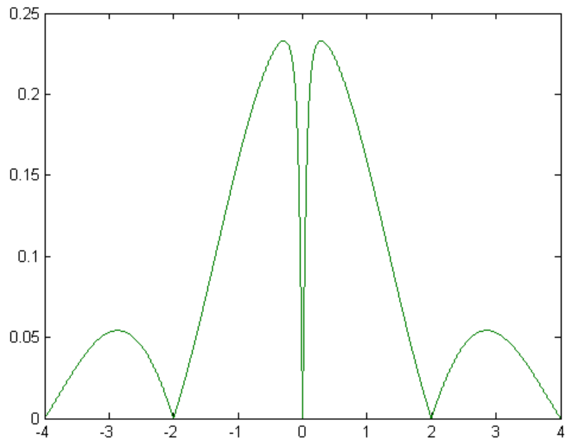

Figure 1: Module de la réponse fréquentielle Exercice 1

3. *Calculez $h_2(t)$ et montrez que*

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left(\mathbf{1}_{[0,1[}(t) - (e^{\frac{1}{4}} - 1)\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t)\right)$$

4. *Représentez graphiquement $h(t)$.*

$$e \approx 1.7,\ e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6,\ e^{\frac{1}{4}} \approx 1.3 \textit{ et } \frac{1}{e} \approx 0.37,\ e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6,\ e^{-\frac{1}{4}} \approx 0.8$$

Solution :

1. On cherche α tel que $h(t) = Ae^{-\alpha t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$. On place en entrée du filtre $x(t) = \delta(t)$.

$$2\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = 2A(-\alpha)e^{-\alpha t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t) + 2A\delta(t) + Ae^{-\alpha t}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t) = \delta(t)$$

Ceci conduit à $\alpha = \frac{1}{2}$ et $A = \frac{1}{2}$. Inversement, quand $\alpha = \frac{1}{2}$ et $A = \frac{1}{2}$, la relation entrée-sortie est bien vérifiée, cela prouve que $h_1(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

2. En mettant en série $\mathcal{H}_1$ avec $\mathcal{H}_2$, on obtient un filtre équivalent à $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}[x(t)](t) = \mathcal{H}_2\left[\mathcal{H}_1[x(t)](t)\right](t)$$

$h(t)$, la réponse impulsionnelle de $\mathcal{H}$ est donc définie par

$$h(t) = h_2(t) * h_1(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

3. La convolution d'un signal par $\delta(t - \frac{1}{2})$ étant équivalente au fait de retarder le signal de $\frac{1}{2}$, on en déduit que

$$h_2(t) = \delta(t) - \delta(t - \frac{1}{2})$$

Après remplacement,

$$h(t) = h_1(t) * \delta(t) - h_1(t) * \delta(t - \frac{1}{2}) = h_1(t) - h_1(t - \frac{1}{2})$$

Pour $t < 0$, $h(t) = h_1(t) - h_1(t - \frac{1}{2}) = 0$.
Pour $t \in [0, \frac{1}{2}[$, $h(t) = h_1(t) - h_1(t - \frac{1}{2}) = h_1(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$.
Pour $t \geq \frac{1}{2}$, $h(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{t-\frac{1}{2}}{2}} = \frac{1}{2}(1 - e^{\frac{1}{4}})e^{-\frac{t}{2}}$

4. La courbe est montrée sur la figure 2.

```
t=-0.1:1e-3:2.1;
e=exp(1);
h1=@(t)1/2*exp(-t/2).*(t>0);
h=h1(t)-h1(t-1/2);
h_c=1/2*exp(-t/2).*(0<=t).*(t<1/2)+1/2*exp(-t/2).*(1/2<=t)*(1-exp(1/4));
figure(1); plot(t,h,t,h_c);
```

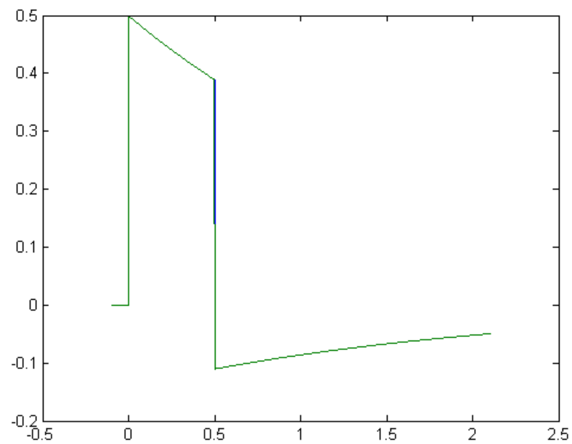

Figure 2: Réponse impulsionnelle. Exercice 2

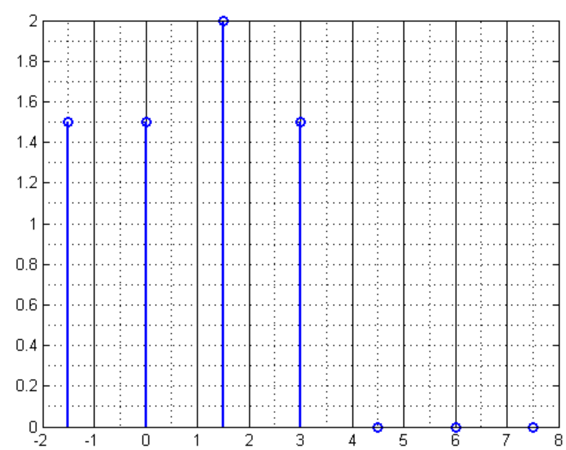

Figure 3: Signal non-périodique, x_n. Exercice 3

Exercice 3 *On considère un signal x_n non-périodique représenté sur la figure 3.*

1. *Mesurez avec la figure 3, quelle est la fréquence d'échantillonnage utilisé ? Expliquez la technique pour mesurer.*

2. *Donnez une équation définissant x_n.*

3. *À partir des valeurs mesurées, calculez* $\widehat{X}(0)$ *?*

4. *À partir des valeurs mesurées, calculez* $\left|\widehat{X}(1)\right|$ *?*

Solution : La courbe montrée a été réalisée avec le programme Matlab suivant.

```
Te=1.5;
motif=[1.5 1.5 2 1.5];
tn=-Te:Te:length(motif)*Te+Te;
xn=[motif 0 0 0];
figure(1); stem(tn,xn);  grid minor
```

1. Pour mesurer plus précisément la période d'échantillonnage, on peut considérer la durée séparant un plus grand nombre de points. $T_e = 1.5$ donc $f_e = \frac{2}{3}$.

2. $$x_n = \frac{3}{2}\delta_{n+1} + \frac{3}{2}\delta_{n-1} + \frac{3}{2}\delta_{n-2} + 2\delta_{n-3}$$

3. Le signal étant temps discret et non-périodique, on utilise la TFTD.

$$\widehat{X}(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n = \frac{13}{2} = 6 + \frac{1}{2}$$

4. $$\widehat{X}(1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi n\frac{3}{2}} = -1.5 - 1.5 + 1.5 - 2 = -\frac{7}{2}$$

Exercice 4 *On considère un signal* x_n *temps discret échantillonné avec* $f_e = 1kHz$ *et défini par*

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\delta_{n-4k} - 0.5\delta_{n-1-4k} + 0.5\delta_{n-2-4k}] \tag{3}$$

1. *Représentez le signal sur l'intervalle de temps entre* $-5ms$ *et* $5ms$*.*

2. *Calculez la transformée de Fourier associée à la fréquence nulle.*

3. *Calculez la transformée de Fourier associée à la fréquence de* $250Hz$*.*

Solution :

1. Le signal est représenté sur la figure 4. La courbe a été obtenue avec cette simulation Matlab qui utilise le fait que le signal décrit par (3) est bien périodique.

```
Te=1e-3;
tn=[-fliplr(Te:Te:5e-3) 0:Te:5e-3];
motif=[1 -0.5 0.5 0];
xn=[motif(end) motif motif motif(1:2)];
figure(1); stem(tn,xn);
```

Sur l'équation (3), on voit que le signal est périodique de période $N = 4$ et que

$$x_0 = 1,\ x_1 = -0.5\ x_2 = 0.5\, x_3 = 0$$

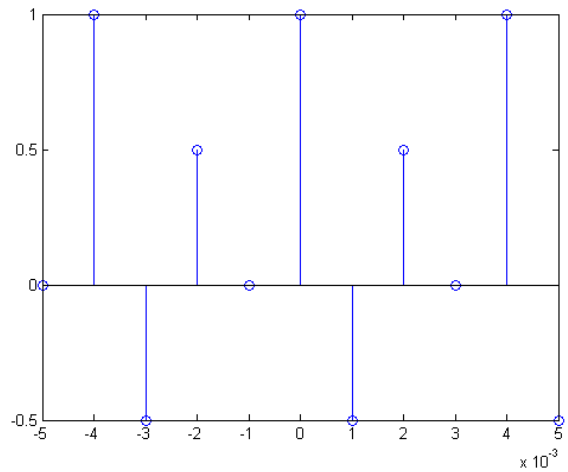

Figure 4: Signal périodique, x_n. Exercice 4

2. Comme le signal est périodique de période 4, on utilise la TFD avec $N = 4$.

$$\widehat{X}_0 = \frac{1}{4}(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{4}$$

3. La première raie correspond justement à $f_1 = \frac{f_e}{N} = 250\text{Hz}$.

$$\widehat{X}_1 = \frac{1}{4}(x_0 + x_1 e^{-j2\pi\frac{1}{4}} + x_2 e^{-j2\pi\frac{2}{4}} + x_3 e^{-j2\pi\frac{3}{4}}) = \frac{1}{4}(1 - 0.5j - 0.5(-1) + 0) = \frac{1}{8}(1 - j)$$